Cursustekst Logica

Ontworpen door Milbou Lotte.

We starten met een korte uitleg over de kaders die gehanteerd worden doorheen de cursus.

Om de overzichtelijkheid te bewaren, werden de oefeningen steeds op het einde van het hoofdstuk geplaatst. Doorheen de tekst verschijnen deze dubbele kaders. Hierin lees je welke oefening(en) je eerst moet maken alvorens verder te gaan. Er is geen extra plaats voorzien voor oplossingen van oefeningen. Je kan op de achterzijden van de bladen werken en/of extra cursusbladen gebruiken.

Belangrijke dingen worden soms extra samengevat voor een duidelijker overzicht. Dit vind je terug in deze kaders met afgeronde hoeken.

Een stukje geschiedenis lees je in de grijze kaders.

Deze kader met schaduw wil zeggen dat er een belangrijke opmerking wordt gemaakt.

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Wat is logica?

Logica, afstammend van het Griekse woord logos, betekent *rede*. Logica is m.a.w. de leer van de rede, het redeneren, of van het begripsvermogen van de mens. We kunnen dit ook simpelweg ons gezond verstand noemen. Goede redeneringen kunnen maken en kritisch kunnen nadenken zijn twee belangrijke vaardigheden om wiskunde te verwerken. Ze zijn echter ook belangrijk in rechtszaken, politiek, het dagelijkse leven, kunst . . . Logica is dus niet slechts beperkt tot de wiskunde. Hoeveel niet-wiskundigen houden er immers niet van om dagelijks de sudoku in de krant in te vullen? Bij een sudoku-puzzel komt er heel wat logica aan te pas. Of stel dat je met twee vrienden/vriendinnen een terrasje gaat doen waarbij deze sangria's bestellen en jijzelf een cola neemt. Als de ober die het drinken serveert zichzelf moeite wil besparen, vraagt hij simpelweg voor wie de cola is. Op die manier concludeert hij dat de overige twee een sangria zullen drinken, logisch toch?

Om sudoku-puzzels op te lossen, is het nodig logisch te redeneren. Een sudoku bestaat uit een matrix van 9×9 cellen die weer zijn onderverdeeld in 9 'blokken'. Iedere puzzel heeft een unieke, logische oplossing. Om een puzzel op te lossen, moet je ervoor zorgen dat elke rij, elke kolom en elk blok de cijfers 1 t.e.m. 9 bevat. Hierbij kan men zichzelf bijvoorbeeld het volgende afvragen: 'als er een 2 in dit blok staat, kan er dan nog een 2 voorkomen in deze kolom?'; 'als er een 4 in deze rij staat, kan er dan nog een 4 voorkomen in dit blok of in deze kolom?' ...

Voorbeeld 1.1.1. *Probeer de omcirkelde cellen in de volgende sudoku's in te vullen ter illustratie en leg uit waarom je precies dat cijfer moet invullen:*

	7		5		2		4	
	3	8	6		4	9	7	
		9				2		
	5			6			2	
			1		3			
	1			7			3	
		5				1		
	2	7	8		9	3	6	
	6		4		1		9	

6				3				4
		2				7		
	4	8	5		6	1	3	
		1		2		5		
	8						1	
		5		9		6		
	6	4	9		8	3	2	
		3				4		
7				5				1

1.2 Logisch redeneren

Voorbeeld 1.2.1. *Alex, Ben, Cédric en Daan hebben een cadeau voor hun vader gekocht. Eén van de vier kinderen heeft het cadeau verstopt. Toen hun moeder vroeg wie het had gedaan, antwoordden ze als volgt:*
Alex: 'Ik was het niet.'
Ben: 'Ik was het niet.'
Cédric: 'Daan heeft het gedaan.'
Daan: 'Ben heeft het gedaan.'

1. *Kunnen de uitspraken allemaal tegelijk waar zijn? Zo ja, wie heeft het dan gedaan? Zo neen, leg uit waarom.*

2. *Moeder denkt dat ze haar zonen goed genoeg kent om te weten wanneer ze liegen. Ze denkt dat slechts één van hen liegt. Kent moeder haar zonen inderdaad goed genoeg? Zo ja, wie heeft het cadeau dan verstopt? Zo neen, leg uit waarom.*

Een verhaal dat jullie ongetwijfeld allemaal kennen is *Alice in Wonderland*. *Alice in Wonderland* is geschreven door de logicus Lewis Caroll (1832-1898). Er zit heel wat logica in het verhaal verborgen. Dit proberen we te illustreren aan de hand van het volgende citaat uit het sprookje. Alice is in Wonderland aangekomen bij het theekransje. Hier ontmoet ze de hoedenmaker (=The Hatter), de maartse haas (=The March Hare) en de hazelmuis (=Dormouse).

Voorbeeld 1.2.2. *Alice is going to the tea party.*
'Excuse me' she said.
But the answer of the Hatter was: 'no no, go away!'
'There's plenty of room' Alice said.
'Allright, have some tea' the March Hare said while he threw away his cup.
'Thank you very much' Alice thanked.
'There isn't any' the March Hare said.
'Not a bit' the Hatter added.
'Then why did you ask if I wanted some?' Alice said angrily.
'Your hair wants cutting,' said the Hatter. He had been looking at Alice for some time with great curiosity.
'You shouldn't make personal remarks' Alice said with some severity.
'You shouldn't say what you dare to hear' the March Hare said.
1. 'I mean what I say, at least, I say what I mean, that's all the same.' Alice said confused.
2. 'It is not, you might just as well say,' said the March Hare, 'that "I like what

I get" is the same thing as "I get what I like"!'
3. 'Or "I see what I eat" is the same as "I eat what I see"!' the Hatter added.
4. 'You might just as well say,' the Dormouse added, who seemed to be talking in his sleep, 'that "I breathe when I sleep" is the same thing as "I sleep when I breathe"!'
5. 'It is the same with you.' said the Hatter, and here the conversation dropped.

1. Lees aandachtig de zin bij puntje 1 opnieuw. Klopt het wat Alice hier beweert? Waarom denk je van wel/niet?

2. We kunnen puntje 1 formuleren in een ALS...DAN... bewering, nl. ALS ik iets zeg, DAN meen ik het en ALS ik iets meen, DAN zeg ik het. Lees aandachtig de zin bij puntje 2 opnieuw. Wat denk je van de reactie van de maartse haas? Kan je dit ook in de vorm van een ALS...DAN... bewering formuleren?

3. Doe hetzelfde voor puntje 4.

4. Wie heeft er volgens jullie gelijk? Alice of de andere drie?

5. Waarom denk je dat de hoedenmaker de opmerking bij puntje 5 maakte?

Voorbeeld 1.2.3. *Vul in de vakjes van onderstaande figuur de letters A t.e.m. I in als je het volgende weet:*

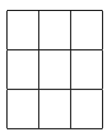
- *A staat onder E. Dit hoeft niet noodzakelijk onmiddellijk onder E te zijn. Dat geldt ook voor de volgende uitspraken.*

- *E staat links van I.*

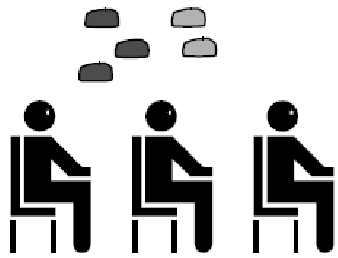
- *B staat boven F en D.*

- *H staat onder E en links van C.*

- *D staat boven F en rechts van G.*

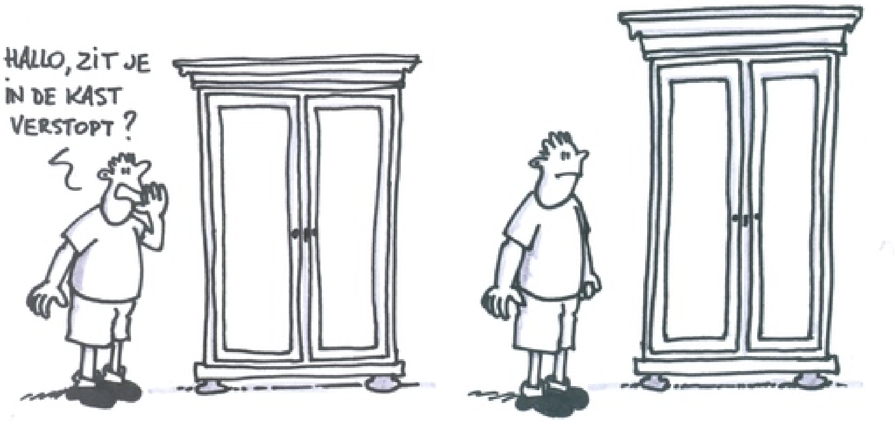


Voorbeeld 1.2.4. *Er zijn twee rode en drie zwarte petjes aanwezig. Drie leerlingen weten dat precies deze petjes 'in de omloop zijn' en zetten zich op een rij. Iedere leerling krijgt een petje op. Ze kunnen alleen de petjes zien van degenen die voor hen zitten, zoals in onderstaande figuur (rechts).*



Aan de achterste leerling wordt gevraagd: 'weet jij welke kleur pet je op hebt?' Na gekeken te hebben naar de twee petjes voor zich, besluit deze negatief te antwoorden. Vervolgens stelt men dezelfde vraag aan de middelste. Die ziet maar één petje voor zich en knikt ook ontkennend. De voorste leerling denkt even na en roept dan: 'dan weet ik de kleur van mijn petje!' Welke kleur heeft dat petje? En hoe komt het dat de voorste leerling dit wist?

Voorbeeld 1.2.5. *Lees aandachtig onderstaande strip en geef commentaar op de redenering die wordt gemaakt.*



Aristoteles

Velen beschouwen *Aristoteles* (ca. 384-322 V.C.), filosoof uit de Griekse oudheid en wetenschapper, leerling van Plato (ca.428-348 V.C) en leermeester van Alexander de Grote, als de grondlegger van de logica. Hij was het die de leer van de logica wist te systematiseren. De leer van Aristoteles domineerde 2000 jaar lang de wetenschappelijke manier van redeneren in de Westerse wereld. Hij heeft hier samen met zijn leerlingen teksten over geschreven die eeuwen later door andere filosofen weerlegd, aangevuld, bewerkt, bediscussieerd . . . werden. De poging van Aristoteles om de logica te ontwikkelen, wordt gezien als één der grootste prestaties van de mensheid.
Hij werkte met syllogismen, d.w.z. logische redeneringen waaruit een conclusie wordt afgeleid. Een voorbeeld van een juist syllogisme (en meteen ook het meest gekende voorbeeld uit de geschiedenis):

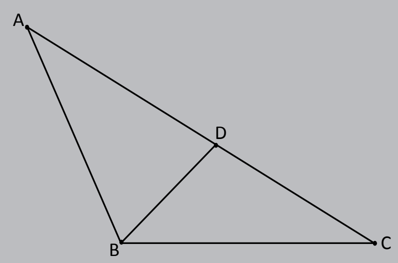
Alle mensen zijn sterfelijk,
Socrates is een mens,
DUS Socrates is sterfelijk.

Euclides

Logica in de wiskunde gaat terug tot bij de oude Grieken. Een tweede belangrijke figuur in de geschiedenis van de logica is de Griekse wiskundige, *Euclides van Alexandrië* (hij leefde rond ±300 V.C.). Euclides schreef wellicht het, op de bijbel na, meest gelezen boek ter wereld, bestaande uit 13 delen. Zijn boek werd 'De elementen van Euclides' genoemd. Voor 2000 jaar lang was dit hét wiskundeboek. Het wordt ook nu nog gebruikt in het wiskundeonderwijs. In *De elementen* vertrok hij vanuit slechts 5 postulaten (voor vaststaand aangenomen uitspraken) en voegde hij ongeveer 130 definities in waarmee hij rond de 465 stellingen bewees! Hij was de eerste die de logica gebruikte in de wiskunde omdat hij deze stellingen logisch afleidde en bewees. Hier wordt een eerste mooie link gelegd naar waarom we logica bestuderen in de wiskunde.
We illustreren dit nu meer in detail aan de hand van een voorbeeld uit het boek van Euclides.

Stelling 1.2.1. *In elke driehoek onderspant een grotere zijde een grotere hoek.*

Bewijs. Laat ABC een driehoek zijn, waarvan de zijde AC groter is dan de zijde AB. We moeten dan aantonen dat ook de hoek $A\hat{B}C$ groter is dan de hoek $B\hat{C}A$. AC is groter dan AB. Laat daarom AD, gelijk aan AB, geplaatst worden op AC, en verbind BD.



Omdat de hoek $A\hat{D}B$ een buitenhoek is van de driehoek BCD, is hij groter dan de niet aanliggende binnenhoek $D\hat{C}B$. Hoek $A\hat{D}B$ is gelijk aan de hoek $A\hat{B}D$, omdat ook de zijde AB gelijk is aan AD. We concluderen dat ook de hoek $A\hat{B}D$ groter is dan de hoek $A\hat{C}B$ en dus is de hoek $A\hat{B}C$ zeker groter dan de hoek $A\hat{C}B$. Dus onderspant in elke driehoek een grotere zijde een grotere hoek. $\square$

Je ziet hoe Euclides, slechts door logisch te redeneren, tot het bewijs is gekomen. Wij zouden tegenwoordig het bewijs iets 'wiskundiger' noteren (bijvoorbeeld simpelweg $A\hat{D}B = A\hat{B}D$). Het idee (of met andere woorden, de logica) achter het bewijs is echter wel hetzelfde gebleven.

Ook in wiskunde komt dus logica voor. In wat volgt, tonen we twee stellingen met hun bewijs. Jullie moeten telkens de methode van het bewijs onderzoeken en bespreken.

Stelling 1.2.2. *Voor elk natuurlijk getal n geldt dat n even is indien n^3 even is.*

Bewijs. Veronderstel dat n een natuurlijk getal is. We willen het volgende bewijzen:

$$n \text{ oneven } \Rightarrow n^3 \text{ oneven.}$$

We veronderstellen dus dat n oneven is. Dan kan n geschreven worden als $n = 2k + 1$ met k een zeker natuurlijk getal. Dan geldt:

$$\begin{aligned} n^3 &= (2k+1)^3 \\ &= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &= 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1. \end{aligned}$$

Het natuurlijk getal n^3 is dus van de vorm $n^3 = 2m + 1$ met m een natuurlijk getal en dus is n^3 oneven. □

Stelling 1.2.3. *Er bestaat geen breuk x met $x^2 = 2$.*

Bewijs. Neem aan dat er wel een breuk x bestaat met $x^2 = 2$. Zo'n breuk heeft een teller m en een noemer n, met m en n allebei natuurlijke getallen, en noemer $n \neq 0$. We mogen aannemen dat de breuk $\frac{m}{n}$ niet verder te vereenvoudigen is. Dit wil zeggen dat m en n geen gemeenschappelijke factoren hebben. Preciezer: er zijn geen natuurlijke getallen k, p, q met $k \neq 1, m = kp$ en $n = kq$. Laten we nu dus aannemen dat $x = \frac{m}{n}$, met m en n zonder gemeenschappelijke factoren. Dan geldt:

$$x^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

Hieruit volgt dus:

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Door beide zijden te vermenigvuldigen met n^2 vinden we dat $2n^2 = m^2$. Hieruit besluiten we dat m^2 even is. Omdat kwadraten van oneven getallen altijd oneven zijn (waarom is dit zo?), moet m even zijn. Er is dus een natuurlijk getal p met $m = 2p$.
Invullen van $2p$ voor m in $2n^2 = m^2$ geeft:

$$2n^2 = (2p)^2 = 4p^2$$

Hieruit blijkt dat $n^2 = 2p^2$ en dit leidt tot de conclusie dat n ook even is. Maar dat betekent dat er een natuurlijk getal q is met $n = 2q$. Dit brengt ons in tegenspraak met de aanname dat $\frac{m}{n}$ een breuk is in de eenvoudigste vorm. Hieruit volgt dat er géén breuk x is met $x^2 = 2$, d.w.z. dat $\sqrt{2}$ geen breuk is. $\square$

Wat valt jullie op aan de manier van bewijzen? Waarom concludeert men dat er toch geen breuk x is met $x^2 = 2$?

Hoofdstuk 2

Propositielogica

2.1 Uitspraken in de omgangstaal versus proposities

Logica gaat gepaard met waarheid. Het handelt over de waarheid van uitspraken. Daarom is het belangrijk dat we specificeren wat er precies bedoeld wordt met een uitspraak. Je doet een uitspraak wanneer je een zin uitspreekt (of neerschrijft ...), je beweert iets. Een uitspraak kan vaak waar of onwaar zijn. Zo zijn bijvoorbeeld '$\sqrt{2}$ is geen breuk', maar ook '$\sqrt{2}$ is een breuk' uitspraken. Een uitspraak met deze waar/onwaar eigenschap noemen we een *propositie* of een *logische uitspraak*. Hou er wel rekening mee dat de context vaak een grote rol speelt, denk bijvoorbeeld aan de propositie 'het regent'. Het is een propositie omdat het ofwel waar, ofwel onwaar is. Het hangt echter van de context af wat het nu precies is. We spreken nog steeds over een propositie wanneer we het waarheidsgehalte niet onmiddellijk kunnen bepalen, bijvoorbeeld 'Jan wint morgen de lotto'; 'morgen sneeuwt het';... Het gaat erom dat die uitspraken ofwel waar, ofwel onwaar zijn, maar nooit allebei.

Op die manier kunnen we ons afvragen wat dan géén proposities zouden zijn. Er zijn uitspraken waarover de meningen verdeeld zijn, bijvoorbeeld 'dit is een mooi schilderij'. In de wiskunde wil men geen twijfelgevallen; daarom beschouwen we dergelijke vormen niet als een propositie. We spreken dan over *uitspraken in de omgangstaal* omdat het nog steeds wel zinnen zijn die mensen zeggen, opschrijven... maar we kunnen de waarheid ervan niet vaststellen. Vraagzinnen en zinnen in de gebiedende wijs drukken ook geen propositie uit.

Maak hier oefeningen 1 en 2 uit paragraaf 2.9.

2.2 Connectieven

Logica gaat, naast waarheid, ook gepaard met taal. Een taal bestaat uit symbolen die via een algemene overeenkomst aan elkaar worden gelinkt zodat er een duidelijke betekenis uit ontstaat en we deze taal kunnen gebruiken om met elkaar te communiceren. We voeren in deze paragraaf de taal van de propositielogica in aan de hand van de uitspraken die we gedefinieerd hebben in paragraaf 2.1.

Een uitspraak kan *enkelvoudig* zijn, bijvoorbeeld '63 is een drievoud' of '63 is een zevenvoud', of *samengesteld*, bijvoorbeeld '63 is een drievoud en een negenvoud' of 'als 63 een drievoud en een zevenvoud is, is 63 een veelvoud van 21'. Samengestelde uitspraken zijn uitspraken die samengesteld zijn uit enkelvoudige uitspraken door middel van voegwoorden (en, of, als-dan, als en slechts als. . .). Deze voegwoorden noemen we *connectieven*. Connectieven laten ons toe om complexere zinnen te maken (of omgekeerd: complexere zinnen te ontleden in eenvoudigere zinnen). We merken dat we deze connectieven eigenlijk al eerder hebben gebruikt: 'als n^3 even is, dan is n even'; 'als Sarah in de kast zit, antwoordt ze niet'; 'ik drink cola en mijn vriendinnen drinken sangria'. . .
We benoemen de kleinst mogelijke deeluitspraken (of de enkelvoudige uitspraken) met de letters $p, q, r \ldots$ en noemen dit de *propositieletters*. Samengestelde uitspraken benoemen we met Griekse letters zoals $\phi, \psi \ldots$ Een samengestelde uitspraak die geschreven wordt als een connectie van enkelvoudige uitspraken, en die enkelvoudige uitspraken zelf, worden ook wel *logische formules* genoemd. Hier komen we later nog op terug. Haakjes worden gebruikt waar het nodig is. Ook hier komen we later nog op terug. We noemen haakjes en dergelijke *hulpsymbolen*. Propositieletters en hulpsymbolen zijn géén connectieven.

Voorbeeld 2.2.1. *'Als Alex, Ben en Daan gelijk hebben, dan heeft Ben het gedaan.'*
Dit kunnen we schrijven als 'Als p en q en r, dan s' met p = 'Alex heeft gelijk', q = 'Ben heeft gelijk', r = 'Daan heeft gelijk' en s = 'Ben heeft het gedaan'. We kunnen deze samengestelde uitspraak ook gewoonweg schrijven als ϕ.

Voorbeeld 2.2.2. *'Een vierhoek ABCD die een rechthoek en een ruit is, is een vierkant'.*
Dit kunnen we schrijven als 'Als p en q, dan r' met p = 'ABCD is een rechthoek'; q = 'ABCD is een ruit'; r = 'ABCD is een vierkant'. We kunnen deze samengestelde uitspraak ook gewoonweg schrijven als ϕ.

Maak hier oefening 3 uit paragraaf 2.9.

In wat volgt, bespreken we de connectieven één voor één.

2.2.1 Negatie

De negatie van de uitspraak 'het schilderij hangt hier' wordt 'het schilderij hangt hier niet'. De uitspraak 'het schilderij hangt hier' kunnen we afkorten tot de propositieletter p. Dan stellen we de negatie van p voor door:

$$\neg p.$$

$\neg$ vormt de negatie en neemt de ontkenning van een propositie, we noemen dit teken het *negatieteken*. In tegenstelling tot de gewone spreektaal, schrijven we het negatieteken vooraan.

De negatie is eigenlijk een speciaal connectief. We hebben een connectief gezien als een verbinding tussen twee uitspraken om een nieuwe uitspraak te maken. Bij een negatie zijn er geen twee uitspraken, maar maak je van één propositie een iets complexere propositie. In de meeste boeken over logica wordt de negatie wel als een echt connectief beschouwd, vandaar dat het hier ook tussen de connectieven staat.

2.2.2 Conjunctie

De conjunctie noemt men ook vaak *'de logische en'*. 'Gabriël tennist en Judith schaakt' kunnen we in de propositielogica weergeven als

$$p \wedge q$$

met p = 'Gabriël tennist' en q = 'Judith schaakt'. Het symbool $\wedge$ noemen we het *conjunctieteken.*
We merken hierbij op dat de propositielogica enkele beperkingen met zich meebrengt en niet alle nuances uit de omgangstaal kan weergeven. Sommigen onder jullie kennen misschien wel de boeken van Nicci French. Nicci French is niet één persoon, maar het is een pseudoniem van het schrijversechtpaar Nicci Gerrard en Sean French. Met de propositielogica kunnen we niet weergeven dat Nicci en Sean samen het boek 'blauwe maandag' hebben geschreven. We zullen dit moeten schrijven als '$p \wedge q$' waarbij p = 'Nicci heeft het boek geschreven' en q = 'Sean heeft het boek geschreven'. Ook een zin als 'Femke en Lotte komen naar het feest' zal opgesplitst worden door de proposities 'Femke komt naar het feest' en 'Lotte komt naar het feest', waaruit niet blijkt of ze samen naar het feest komen of niet. Zo zit er ook een beperking in de tijdsvolgorde. In onze spreektaal geeft 'en' vaak, naast de samenvoeging van twee deelbeweringen, een tijdsvolgorde aan. Bijvoorbeeld 'Pieter kwam binnen en deed het licht aan'. Hieruit kan je afleiden dat Pieter binnenkwam alvorens hij het licht aandeed. Als er zou staan 'Pieter deed het licht aan en kwam binnen', krijgt deze zin een andere betekenis. Deze bijzonderheden kunnen we niet uitdrukken in de propositielogica.

2.2.3 Disjunctie

De disjunctie noemt men ook vaak *de logische of.* 'Arne mag binnen in het pretpark als hij vergezeld wordt door zijn vader of moeder', kunnen we in de propositielogica weergeven als

$$p \vee q$$

met p = 'Arne mag binnen in het pretpark met zijn vader' en q = 'Arne mag binnen in het pretpark met zijn moeder'. Het symbool $\vee$ noemen we het *disjunctieteken.* Met deze logische *of* hebben we de *inclusieve disjunctie* op het oog. Hiermee wordt bedoeld dat $p \vee q$ ook waar is als zowel p als q waar zijn. In het verdere verloop van deze cursus bedoelen we steeds deze inclusieve disjunctie als het over de logische *of* gaat. In het dagelijkse leven gebruiken we ook vaak een exclusieve disjunctie, zoals in het onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld 2.2.3. *'Voor je verjaardag krijg je een iPhone of een iPad'.*

Om de conjunctie en disjunctie gemakkelijk uit elkaar te houden, kan je gebruik maken van volgend ezelsbruggetje:
EN bevat de n-klank en het conjunctieteken lijkt ook op een n: $\wedge$,
OF bevat de v-klank en het disjunctieteken lijkt ook op een v: $\vee$.

2.2.4 Implicatie

Een implicatie noemen we ook vaak een als-dan uitspraak. 'Als je de kraan laat lopen, dan stroomt de emmer over' kunnen we in de propositielogica weergeven als

$$p \Rightarrow q$$

met $p =$ 'je laat de kraan lopen' en $q =$ 'de emmer loopt over'. Het symbool $\Rightarrow$ noemen we het *implicatieteken*.

2.2.5 Equivalentie

Een equivalentie spreken we uit als 'als en slechts als'. Zo kunnen we de uitspraak '$A \subset B$ als en slechts als $A \cap B = A$' weergeven als

$$p \Leftrightarrow q$$

met $p =$ '$A \subset B$' en $q =$ '$A \cap B = A$'. Het symbool $\Leftrightarrow$ noemen we het *equivalentieteken*.

Connectieven in de propositielogica

Connectief	Uitspraak	Naam
$\neg$	niet	negatieteken
$\wedge$	en	conjunctieteken
$\vee$	of	disjunctieteken
$\Rightarrow$	als-dan	implicatieteken
$\Leftrightarrow$	aesa	equivalentieteken

2.3 Formules uit de propositielogica

We kunnen nu, preciezer dan voorheen, uitleggen wat we met logische uitspraken/formules bedoelen. In de definitie gebruiken we de letters ϕ en ψ voor willekeurige logische uitspraken/formules. Omdat enkelvoudige uitspraken (voorgesteld door propositieletters) ook logische uitspraken/formules zijn, kunnen we ze ook voorstellen door ϕ en/of ψ.

Definitie 2.3.1. *Logische uitspraken/formules van de propositielogica:*

- *Enkelvoudige uitspraken zijn logische uitspraken/formules en worden voorgesteld door de propositieletters* $p, q, r \ldots$
- *Als* ϕ *een logische uitspraak/formule is, dan is ook* $\neg\phi$ *een logische uitspraak/formule.*
- *Als* ϕ *en* ψ *logische uitspraken/formules zijn, dan zijn* $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \Rightarrow \psi)$ *en* $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ *er ook.*
- *Andere logische uitspraken/formules dan diegene die op bovenstaande manier gevormd worden, zijn er niet.*

Alle logische uitspraken/formules die geen losse propositieletter zijn, noemen we samengestelde logische uitspraken/formules. Een logische uitspraak/formule noemen we een logische deeluitspraak/deelformule van een logische uitspraak/formule als die bij de opbouw van die logische uitspraak/formule gebruikt is; elke logische uitspraak/formule is tevens een logische deeluitspraak/deelformule van zichzelf.

Vanaf nu spreken we niet meer veel over wat de uitspraken $p, q, r \ldots$ betekenen. Onze aandacht verschuift naar de structuur van samengestelde logische uitspraken, waarbij de inhoud naar de achtergrond verschuift. We willen nu vooral onderzoeken: ‘wanneer is een logische uitspraak waar?’, ‘waar moeten we haakjes plaatsen?’... Hierbij is het niet van belang welke betekenis de propositieletters hebben.

Het is nu nuttig duidelijkheid te scheppen i.v.m. waar haakjes moeten staan en waar niet. Dit zal het lezen van ingewikkeldere formules bevorderen. Er zijn twee belangrijke afspraken die we maken omtrent het plaatsen van haakjes:

1. Het buitenste paar haakjes wordt meestal niet geschreven.
2. We stellen de afnemende prioriteit van de connectieven vast: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. D.w.z. dat $\neg$ steeds eerst zal geïnterpreteerd worden, daarna $\wedge \ldots$

Er zijn formules die we zonder haakjes kunnen schrijven, zoals bijvoorbeeld $p \Rightarrow \neg\neg q$. Er zijn echter ook formules waarbij haakjes noodzakelijk zijn. Denk bijvoorbeeld aan de formule

$$\neg(q \Rightarrow r).$$

Als er gewoonweg $\neg q \Rightarrow r$ zou staan, interpreteren we dit als $(\neg q) \Rightarrow r$ omdat de negatie 'voorrang' krijgt.

Voorbeeld 2.3.1. *We interpreteren de uitdrukking $p \Leftrightarrow \neg q \vee r \Rightarrow p$ in onderstaande volgorde*

$$p \Leftrightarrow (\neg q) \vee r \Rightarrow p$$

$$p \Leftrightarrow ((\neg q) \vee r) \Rightarrow p$$

$$p \Leftrightarrow (((\neg q) \vee r) \Rightarrow p)$$

$$(p \Leftrightarrow (((\neg q) \vee r) \Rightarrow p))$$

Maak hier oefeningen 4 en 5 uit paragraaf 2.9.

Definitie 2.3.2. *Het bereik van een connectief definiëren we als het deel (of de delen) van de formule waar het connectief betrekking op heeft.*

Voorbeeld 2.3.2. *Het bereik van $\wedge$ in $r \vee (\neg p \wedge q)$ is $\neg p$ en q, en het bereik van $\vee$ bestaat uit de deelformules r en $(\neg p \wedge q)$.*

Voorbeeld 2.3.3. *Hier geven we enkele voorbeelden over wat een formule en wat geen formule is.*

Formule	*Geen formule*
q	$\neg$
$\neg q$	$\neg(\wedge$
$\neg(\neg q \Leftrightarrow p)$	$\neg p \wedge q)$
$\neg\neg(p \vee (q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)))$	$p \Leftrightarrow qr$
$(p \wedge q)$	$\neg pq$

In een vorige oefening hebben we de kleinste deeluitspraken moeten zoeken en hebben we de proposities moeten herschrijven. Met de geziene connectieven wordt het zelfs mogelijk om een uitspraak volledig om te zetten naar een formule. Het is echter mogelijk dat we de zin eerst anders zullen moeten formuleren alvorens we ze zullen kunnen omzetten naar een formule.

Voorbeeld 2.3.4. *'Martijn fietst naar het werk als zijn auto kapot is of als het mooi weer is'. Hier staat eigenlijk een als-dan bewering maar om dat duidelijker tot uitdrukking te brengen, draaien we de volgorde om: 'Als Martijn zijn auto kapot is of als het mooi weer is, dan fietst Martijn naar zijn werk'. Zo krijgen we simpelweg:*

$$p \vee q \Rightarrow r$$

met $p =$ *'Martijn zijn auto is kapot';* $q =$ *'het is mooi weer' en* $r =$ *'Martijn fietst naar zijn werk'.*

Maak hier oefeningen 6, 7, 8 en 9 uit paragraaf 2.9.

Leibniz

Een belangrijke figuur in de geschiedenis van de logica is ongetwijfeld *Leibniz* (1646-1716). Leibniz was een Duitse filosoof die zich ook met wiskunde bezighield. Hij probeerde Aristoteles' logica te verbeteren en ontwikkelde een eigen kennistheorie. Hij stelde voor de regels van het redeneren met wiskundige middelen te bestuderen, maar heeft dit zelf nooit uitgewerkt. Hij was één van de eersten die een soort van algebraïsch opzet voor de logica probeerde te vinden (een soort van universele taal). Dit houdt in dat hij bewerkingen probeerde te verzinnen die geldig moesten zijn buiten de rekenkunde en het rekenen met wiskundige objecten. Hij wist dat het moeilijk zou worden deze taal uit te vinden, maar dat het wel heel gemakkelijk zou worden voor anderen om de taal te verstaan zonder dat ze hierbij een woordenboek nodig hadden. Leibniz is gestorven zonder zijn droom waar te maken, maar heeft anderen wel met zijn gedachten achtergelaten. Hij dacht dat je je gedachten even vatbaar kon maken als wiskunde, zodat je de fout in je gedachten in een oogopslag duidelijk zou kunnen maken. En als er discussies tussen personen zouden bestaan, zouden we simpelweg kunnen narekenen wie er gelijk heeft. In principe verkondigde Leibniz dus de eigenschappen van wat wij nu de conjunctie, disjunctie . . . noemen.

Het invoeren van de connectieven brengt meerdere positieve eigenschappen met zich mee. Ten eerste is het gemakkelijk omdat het internationaal is. In een vreemd land zullen de mensen ook weten waarover je spreekt. Ten tweede geven ze je het gevoel dat je een 'bewerking' uitvoert met uitspraken, te vergelijken met de bewerkingen die we uitvoeren op getallen. Nog niet slecht gedacht van Leibniz toch?!

2.4 Waarheidstabellen

De formules uit de vorige paragraaf laten vaak niet in een oogwenk zien wanneer ze een ware bewering opleveren of niet. Daarvoor voeren we de waarheidstabellen of waarheidstafels in. We namen aan dat een propositie ofwel waar, ofwel onwaar is, maar nooit beide tegelijk. Daarom kunnen we een eenvoudige notatie invoeren: wanneer een propositie waar is, geven we dit weer met het getal 1 en wanneer ze onwaar is, geven we dit weer met het getal 0. Voor samengestelde proposities hangt de waarde af van de waarde van de deeluitspraken en wordt deze berekend met behulp van tabellen, waarheidstabellen. We laten de connectieven opnieuw één voor één de revue passeren met de bijhorende waarheidstabellen om hun effect op de waarheidstabellen te bespreken. De implicatie laten we achterwege. Daar komen we later nog op terug.

2.4.1 Negatie

De negatie van propositie p is waar als p onwaar is en onwaar als p waar is. We kunnen dit samenvatten in de volgende waarheidstabel:

p	$\neg p$
1	0
0	1

We kunnen dit ook veralgemenen voor een willekeurige formule ϕ (net zoals alle andere waarheidstabellen die volgen, maar gemakshalve werken we steeds verder met p en/of q):

ϕ	$\neg\phi$
1	0
0	1

2.4.2 Conjunctie

Voor de conjunctie hebben we een grotere tabel nodig. Er zijn immers meer mogelijke combinaties voor de waarheidswaarden van twee proposities p en q. Hoeveel mogelijkheden denk je dat er bekeken moeten worden?

We weten dat $p \wedge q$ alleen waar is als zowel p als q waar zijn. Zo komen we op de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Maak hier oefeningen 10 en 11 uit paragraaf 2.9.

Hoeveel mogelijkheden denk je dat je moet controleren voor bijvoorbeeld $p \wedge q \wedge r$? Kan je dit veralgemenen?

2.4.3 Disjunctie

De uitspraak $p \vee q$ is in drie van de vier gevallen waar. Ze is enkel onwaar als zowel p als q onwaar zijn. We komen zo tot de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Maak hier oefeningen 12 en 13 uit paragraaf 2.9.

2.4.4 Equivalentie

Bij een equivalentie $p \Leftrightarrow q$ is de uitspraak waar als p en q beide waar of beide onwaar zijn. Zo komen we tot de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Maak hier oefening 14 uit paragraaf 2.9.

2.5 Implicaties

2.5.1 Invoeren van de waarheidstabel

> Maak hier oefeningen 15 en 16 uit paragraaf 2.9.

De implicatie behandelen we in een apart hoofdstukje omdat dit het moeilijkste connectief is. We bekijken de implicatie met het voorbeeld: ‘Als het regent, dan worden de straten nat’. We weten dat deze samengestelde uitspraak waar is. Maar hoe verhoudt de waarheid van deze samengestelde uitspraak zich tot de waarheid van de deeluitspraken ‘het regent’ en ‘de straten zijn nat’? Afhankelijk van het weer en van andere zaken, kunnen die waar of onwaar zijn. Ze kunnen beide waar zijn of beide onwaar zijn. Ook is het mogelijk dat de uitspraak ‘het regent’ niet waar is en ‘de straten zijn nat’ wel waar. Denk bijvoorbeeld aan je buurman die zijn vrachtwagen wast. Op die manier zal de straat ook behoorlijk nat zijn. Bij een ware implicatie $p \Rightarrow q$ kan het echter niet dat p waar is en q niet. Als we toch zouden vaststellen dat het regent en dat de straten niet nat worden, dan zou de implicatie niet waar zijn.

We komen zo tot de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Deze waarheidstabel is nog steeds moeilijk voor veel mensen omdat implicaties in de omgangstaal verschillen van die in de logica. In de omgangstaal gebruiken we als-dan uitspraken als oorzaak-gevolg uitspraken. Als de oorzaak zich dan niet voordoet, is het irrelevant toch over het gevolg na te denken en vinden we de implicatie onwaar. In het voorbeeld over de regen en de natte straten leek dit nog vrij logisch. Maar het is ook zo dat zinnen die totaal geen betekenis hebben in de spreektaal, in bepaalde gevallen toch een correcte implicatie kunnen vormen in de propositielogica. Denk bijvoorbeeld aan de zin: ‘Als vandaag de zon schijnt, dan is wiskunde een belangrijk vak’. Laten we aannemen dat wiskunde een belangrijk vak is, dan zal het ‘gevolg’ waarde 1 krijgen en de implicatie dus altijd waar zijn in de propositielogica. Nochtans zou men kunnen opmerken dat het nergens op slaat omdat het weer natuurlijk niets te maken heeft met het belang van wiskunde. Uit onderzoek blijkt dat mensen verwachten dat de uitspraak vals is, maar volgens onze afspraken is de uitspraak toch waar. Alleszins is de uitspraak wel misleidend. . .

Als je dit nog steeds verwarrend vindt, kan volgend voorbeeld hopelijk een geheugensteuntje vormen.

Voorbeeld 2.5.1. *Sarah, Nathalie en Nico spelen samen een spelletje darts. Alvorens het spel begint, doet Sarah volgende uitspraak: 'Als ik dit spelletje darts win, trakteer ik jullie allebei op een ijsje'. De belofte die Sarah hier maakt is, korter gezegd, een samenstelling van twee proposities namelijk 'ik win' en 'ik trakteer'. Als we vooruit willen kijken, weten we dat er zich vier situaties kunnen voordoen:*

1. *Sarah heeft niet gewonnen en ze heeft niet getrakteerd.*
2. *Sarah heeft niet gewonnen en ze heeft getrakteerd.*
3. *Sarah heeft gewonnen en ze heeft niet getrakteerd.*
4. *Sarah heeft gewonnen en ze heeft getrakteerd.*

In welke van de vier gevallen kunnen we Sarah een leugenaar noemen?

In het eerste geval heeft ze niet gewonnen en hoeft ze dus ook niet te trakteren. In het tweede geval zou Sarah erg genereus zijn, ze heeft niet gewonnen maar toch getrakteerd. Het zou voor haar niet leuk zijn om dan als leugenaar bestempeld te worden, want dat is ze niet. Ze heeft namelijk nooit gezegd dat ze uitsluitend zou trakteren als ze zou winnen. Als ze zou winnen, zou ze het zeker en vast ook gedaan hebben, maar het staat haar vrij om ook te trakteren als ze niet wint.
In het derde geval kunnen we haar wel een leugenaar noemen. Ze had beloofd te zullen trakteren en heeft dat niet gedaan.
In het laatste geval is ze haar belofte nagekomen en is er dus geen probleem.
In dit voorbeeld zien we de correcte 'waarheidstabel' van de implicatie verschijnen. Slechts in één van de vier gevallen kunnen we Sarah namelijk een leugenaar noemen.

2.5.2 Redeneervormen gebaseerd op de implicatie

Implicaties vormen de basis voor veel redeneringen die we maken, zeker in de wiskunde maar ook daarbuiten.

Definitie 2.5.1. *We kunnen op twee manieren een conclusie trekken uit de ware implicatie $p \Rightarrow q$:*

- *Als p waar is, dan kunnen we concluderen dat q ook waar is. Dit noemen we de modus ponens (=bevestigende modus).*

- *Als q niet waar is, kunnen we concluderen dat p ook niet waar is. Dit noemen we de modus tollens (ontkennende modus).*

Voorbeeld 2.5.2. *De modus ponens of bevestigende modus spreekt voor zich. Als het geregend heeft, dan zijn de straten nat. Een andere conclusie die we uit deze implicatie kunnen trekken (nl. de modus tollens) is dat als de straten NIET nat zijn, het ook NIET geregend heeft. Want als het WEL geregend zou hebben, zouden de straten toch nat zijn.*

We kunnen nu terugkomen op het probleem van de petjes uit de inleiding. Er zitten drie leerlingen op een rij met allemaal een gekleurd petje op en ze kunnen alleen de kleuren van de petjes voor zich zien. Ze weten dat er twee rode petjes en drie zwarte petjes in de omloop zijn. De achterste twee leerlingen blijken de kleur van hun eigen petje niet te kunnen uitmaken. Daardoor is de voorste leerling overtuigd van de kleur van het petje op zijn hoofd. We bekijken nu de redenering van de verschillende leerlingen.
De middelste leerling weet dat de implicatie $p \Rightarrow q$ waar is als $p =$ 'de achterste leerling ziet twee rode petjes voor zich' en $q =$ 'de achterste leerling weet welk petje hij op heeft'. Maar de achterste leerling zegt dat hij niet weet welke kleur petje hij op heeft. De middelste leerling weet dus dat q niet waar is. Maak nu zelf de redenering van de middelste leerling af door de modus tollens te gebruiken. Geef de redenering van de voorste leerling op dezelfde manier weer.

Verbeter, met wat je nu weet, zelfstandig oefeningen 15 en 16 uit paragraaf 2.8 en maak ook oefening 17 en 18.

De equivalentie ziet men ook vaak als een dubbele implicatie. Er moet dan gelden $p \Rightarrow q$, maar ook $q \Rightarrow p$. Als deze beide gelden, schrijven we kortweg: $p \Leftrightarrow q$. Let wel op, dit wil niet zeggen dat je de implicaties zomaar mag omdraaien. Dit hebben we gezien in het citaat uit Alice in Wonderland. Een ander mooi tegenvoorbeeld: 'als een getal deelbaar is door 4, is het even'. Als echter een getal even is, zal het niet steeds deelbaar zijn door 4 (denk bijvoorbeeld aan 6). Je zou deze implicatie dus wel kunnen omdraaien, maar beide implicaties zullen een andere waarheidswaarde hebben.

Maak hier oefening 19 uit paragraaf 2.9.

Definitie 2.5.2. *Bij een implicatie noemen we het ondersteld*e antecedens *en het gesteld*e consequens.

Voorbeeld 2.5.3. *In de propositie 'als x een natuurlijk getal is, dan is $2x$ een natuurlijk getal' noemen we 'x is een natuurlijk getal' het antecedens en '$2x$ is een natuurlijk getal' het consequens.*

Waarheidstabellen horende bij de geziene connectieven

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

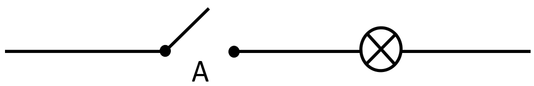
Boole, Morgan, Russel, Frege . . .

De volgende grote figuur in de logica, na Leibniz, is *George Boole* (1815-1864), een Engelse onderwijzer die zich in zijn vrije tijd bezighield met wiskunde. Hij ontwikkelde wat we nu de Booleaanse algebra noemen, een rekenkunde voor proposities. Deze werd later door andere wiskundigen als De Morgan, Russell, Whithead, Frege . . . uitgebreid tot de symbolische logica (propositielogica die werd uitgebreid tot predicatenlogica - zie hoofdstuk 3).

2.6 Logische schakelingen

De processor is het brein of anders gezegd, de kern, van de computer. De processor slaat aan het rekenen voor àlle handelingen die je verricht met de computer. Of je nu muziek luistert, surft op het internet of simpelweg beweegt met je muis, altijd zijn er berekeningen nodig en die worden door de processor gemaakt. De processor bestaat uit allerlei schakelingen en werkt dus logischerwijze op stroom.

De algebra die George Boole ontwikkelde, wordt nog dagelijks gebruikt door iedere ontwerper van logische of elektrische schakelingen en door computerprogrammeurs om software te ontwerpen. Vaak gebruiken informatici andere notaties, maar voor de eenvoud blijven we bij onze eerder ingevoegde notaties. Bij het zoeken naar een technisch model heeft men ervoor gekozen om een schakelaar als ingangsvariabele te nemen. Een schakelaar is immers een binair element, hij is ofwel open, ofwel gesloten. In figuur 2.6 zie je dat de schakelaar (A) open wordt afgebeeld. Aan een open schakelaar (zoals hij hier afgebeeld staat), kennen we waarde 0 toe en aan een gesloten schakelaar waarde 1. Voor de duidelijkheid beelden we schakelaars altijd open af en gaan we steeds beide gevallen na. De output simuleren we met een lamp (eveneens een binair element, de lamp is ofwel aan, ofwel uit). Aan een lamp kennen we waarde 0 toe als ze uit is en waarde 1 als ze brandt. De lamp wordt steeds voorgesteld door een bolletje met een kruis door en we korten ze af met L. De onderstaande figuur stelt schakelaar A voor.



Figuur 2.1: Schakeling A.

Hier krijgen we logischerwijs de volgende situatie:

A	L
1	1
0	0

We krijgen hier volgende logische vergelijking:

$$L = A.$$

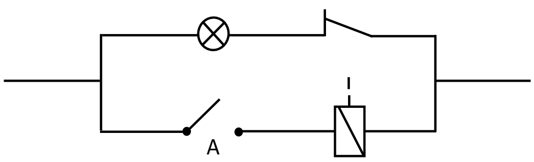
In een schakeling kan een processor meerdere inputs ontvangen, maar slechts één output produceren. D.w.z. dat er steeds meerdere schakelaars kunnen zijn, maar slechts één lamp. Stel nu dat we 2 schakelaars hebben, hoeveel mogelijke ingangscombinaties zijn er dan voor de processor om te interpreteren?

Hoeveel zijn dit er bij 3 schakelaars?

Kan je dit veralgemenen naar n?

We herkennen in de tabel uit de schakeling hierboven hetzelfde principe als de waarheidstabellen die we eerder zagen. We trachten nu de tabellen van de negatie, conjunctie en disjunctie te achterhalen bij logische schakelingen.

Voor de negatie maken we gebruik van een relais, een soort schakelaar. De werking van een relais is niet van toepassing voor deze cursus. Het is wel belangrijk om te weten dat de relais het tegenovergestelde doet van de schakelaar waarmee hij in verbinding staat. Als de schakelaar waarmee de relais in verbinding staat open is, zal de relais gesloten zijn en andersom. De relais wordt voorgesteld door een rechthoek met een schuine streep door, staande tegenover een schakelaar (zie figuur 2.2) en we korten dit af als R.



Figuur 2.2: Schakeling $\neg A$.

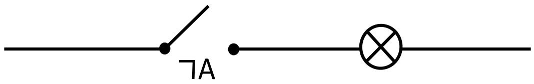
Omdat R in verbinding staat met A, krijgen we hier logischerwijs de volgende situatie:

A	R	L
1	0	0
0	1	1

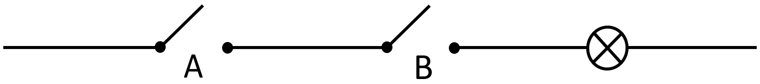
Als we enkel A en L bekijken, zien we dat L altijd het omgekeerde is van A. We herkennen inderdaad de negatie. We bekomen hier volgende logische vergelijking:

$$L = \neg A.$$

Omdat het symbool van een relais in het circuit van $\neg A$ vrij ingewikkeld is, werken we in deze cursus verder met de notatie zoals in figuur 2.3 voor $\neg A$.
Bekijk nu het circuit in figuur 2.4.



Figuur 2.3: Schakeling $\neg A$.



Figuur 2.4: Schakeling …

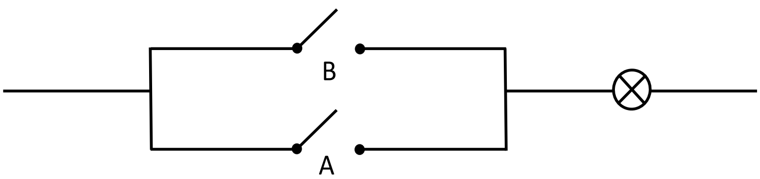
We noemen dit een serieschakeling omdat de schakelaars in serie staan. Wanneer kan de lamp branden?

Hoe zou je dan de waarheidstabel opstellen?

A	B	L

Wat herken je hierin? Welke logische vergelijking bekomen we?

We gaan nu hetzelfde doen voor het circuit in figuur 2.5.



Figuur 2.5: Schakeling …

We noemen dit een parallelschakeling omdat de schakelaars in parallel staan. Wanneer kan de lamp branden?

Hoe zou je dan de waarheidstabel opstellen?

A	B	L

Wat herken je hierin? Welke logische vergelijking bekomen we?

2.6.1 Logische poorten

We hebben tot nu toe steeds gewerkt met schakelaars als ingangsvariabelen en een lamp als output. Natuurlijk bevinden er zich geen duizenden lampjes en schakelaars in de processor. Een processor werkt eigenlijk met logische poorten. Zo spreekt men van een EN-poort in plaats van een EN-schakeling, een OF-poort in plaats van een OF-schakeling...

Definitie 2.6.1. *Een logische poort is een elektronische schakeling met één of meerdere ingangen en één uitgang, waarbij de logische toestand van de uitgang enkel en alleen bepaald wordt door de logische toestand van de ingangen. Met logische toestand bedoelen we hier 0 of 1.*

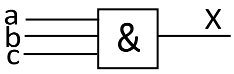
De EN-poort

Definitie 2.6.2. *Een EN-poort is een schakeling met één uitgang en meerdere ingangen, waarbij de uitgang slechts 1 is als en slechts als alle ingangen 1 zijn. De uitgang wordt 0 zodra minstens één ingang 0 wordt.*

Uit de definitie kunnen we de volgende waarheidstabel afleiden (voor 3 ingangen a, b en c en uitgang X).

a	b	c	X
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

We herkennen hier de formule $X = a \wedge b \wedge c$ in. De EN-poort kan symbolisch voorgesteld worden door het symbool in figuur 2.6.



Figuur 2.6: Symbolische voorstelling van de EN-poort

We zien dat de EN-poort eigenlijk hetzelfde doet als de logische schakeling in figuur 2.4. De voorstelling is echter veel compacter. Het aantal ingangen kan uitgebreid worden, maar het minimum is twee.

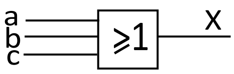
De OF-poort

Definitie 2.6.3. *Een OF-poort is een schakeling met één uitgang en meerdere ingangen, waarbij de uitgang 1 is zodra minstens één ingang 1 is. De uitgang wordt 0 als en slechts als alle ingangen 0 zijn.*

Uit de definitie kunnen we de volgende waarheidstabel afleiden (voor 3 ingangen a, b en c en uitgang X).

a	b	c	X
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

We herkennen hier de formule $X = a \vee b \vee c$ in. De OF-poort kan symbolisch voorgesteld worden door het symbool in figuur 2.7.



Figuur 2.7: Symbolische voorstelling van de OF-poort

We zien dat de OF-poort eigenlijk hetzelfde doet als de logische schakeling in figuur 2.5. De voorstelling is echter veel compacter. Het aantal ingangen kan uitgebreid worden, maar het minimum is twee.

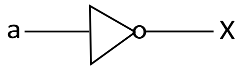
De NIET-poort

Definitie 2.6.4. *Een NIET-poort is een schakeling met één ingang en één uitgang, waarbij de uitgang altijd de inverse toestand heeft van de ingang. De uitgang is dus 1 als de ingang 0 is en de uitgang is 0 als de ingang 1 is.*

Uit de definitie kunnen we de volgende waarheidstabel afleiden (voor ingang a en uitgang X).

a	X
1	0
0	1

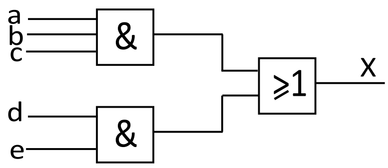
We herkennen hier de formule $X = \neg a$ in. De NIET-poort kan symbolisch voorgesteld worden door het symbool in figuur 2.8.



Figuur 2.8: Symbolische voorstelling van de NIET-poort

We zien dat de NIET-poort eigenlijk hetzelfde doet als de logische schakelingen in figuren 2.2/2.3.

Voorbeeld 2.6.1. *We kunnen de vergelijking* $X = (a \wedge b \wedge c) \vee (d \wedge e)$ *symbolisch voorstellen zoals in figuur 2.9.*



Figuur 2.9: Voorbeeld schakeling met poorten

Met de logische poorten die we tot nu toe gezien hebben, kunnen we veel kanten op. Hiermee bedoelen we dat elke logische schakeling, hoe ingewikkeld ook, volledig kan opgebouwd worden met de EN-, OF- en NIET-poort. Om het eenvoudiger te maken, heeft men ook afgeleide poorten ingevoerd. Hieronder volgen enkele voorbeelden.

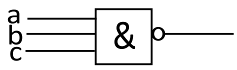
De NEN-poort

Definitie 2.6.5. *Een NEN-poort is een EN-poort gevolgd door een NIET-poort. Het is een schakeling waarin de uitgang 1 wordt van zodra één of meerdere ingangen 0 zijn. De uitgang kan enkel 0 zijn als en slechts als alle ingangen 1 zijn.*

Uit de definitie kunnen we de volgende waarheidstabel afleiden (voor 3 ingangen a, b en c en uitgang X).

a	b	c	X
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

We herkennen hier de formule $X = \neg(a \wedge b \wedge c)$ in. De NEN-poort kan symbolisch voorgesteld worden door het symbool in figuur 2.10.



Figuur 2.10: Symbolische voorstelling van de NEN-poort

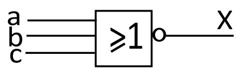
De NOF-poort

Definitie 2.6.6. *Een NOF-poort is een OF-poort gevolgd door een NIET-poort. Het is een schakeling waarin de uitgang 0 wordt van zodra één of meerdere ingangen 1 zijn. De uitgang kan enkel 1 zijn als en slechts als alle ingangen 0 zijn.*

Uit de definitie kunnen we de volgende waarheidstabel afleiden (voor 3 ingangen a, b en c en uitgang X).

a	b	c	X
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

We herkennen hier de formule $X = \neg(a \vee b \vee c)$ in. De NOF-poort kan symbolisch voorgesteld worden door het symbool in figuur 2.11.



Figuur 2.11: Symbolische voorstelling van de NOF-poort

Maak hier oefening 20 uit paragraaf 2.9.

2.7 Tautologieën en contradicties

Onderzoek met behulp van een waarheidstabel de waarheidswaarden van de formule $\neg(p \wedge \neg p)$. Wat valt je op?

Door middel van waarheidstabellen kunnen we onderzoeken onder welke voorwaarden een formule waar is. We hebben hierbij twee speciale gevallen, nl. een formule die altijd waar is of een formule die nooit waar is. We spreken over een formule die altijd waar is als zij voor elke toekenning van waarheidswaarden aan de propositieletters waar is (zoals de formule hierboven).

Definitie 2.7.1. *Een propositie heet een tautologie als en slechts als deze steeds waar is.*

De eenvoudigste tautologieën zijn van de vorm $p \Rightarrow p$. Neem voor p iets willekeurig, bijvoorbeeld 'ik praat'. Dan krijg je: 'als ik praat, dan praat ik'. Merk hierbij op dat de formule $\neg(p \wedge \neg p)$ vrij eenvoudig is. Je kon misschien reeds aan de formule zelf afleiden dat ze altijd waar is, maar bij moeilijkere formules is dat niet meer mogelijk. Om na te gaan of een formule een tautologie is, dienen we dus een waarheidstabel op te stellen, en vervolgens te kijken of de kolom onder het connectief met het grootste bereik alleen maar enen bevat.

Voorbeeld 2.7.1. *De formule $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ is een tautologie. Dit kan je gemakkelijk afleiden uit de waarheidstabel:*

p	q	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0
		1	2	1	3	1	2	1

Voorbeeld 2.7.2. *De formule $\neg(q \wedge p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ is een tautologie. Ga dit zelf na aan de hand van de waarheidstabel.*

We willen de definitie van een tautologie op een meer exacte wijze formuleren. Hiertoe voeren we eerst de definitie van een waardering in.

Definitie 2.7.2. *Een waardering w is een afbeelding*

$$w : \{\phi | \phi \text{ is een propositie}\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

die aan elke propositieletter een waarheidswaarde 0 of 1 toekent (bijvoorbeeld $w(p) = 1$, $w(q) = 0 \ldots$*). Verder kent de afbeelding aan elke formule een waarheidswaarde toe die in overeenstemming is met de gegeven waarheidswaarden voor de propositieletters en de waarheidstabellen voor de connectieven. D.w.z. dat wanneer* ϕ *een samengestelde propositie is uit de propositieletters* $p, q, r, s \ldots$, *men* $w(\phi)$ *zal kennen van zodra men ook* $w(q), w(r), w(s) \ldots$ *kent.*

Voorbeeld 2.7.3. *Als* $\phi = p \wedge q$ *en als we weten dat* $w(p)$ *en* $w(q)$ *beide gelijk zijn aan 1, dan zal* w *ook* ϕ *afbeelden op 1, of met andere woorden* $w(\phi) = 1$. *Dit kunnen we afleiden uit de waarheidstabel van de conjunctie. Op de rij waar* $w(p) = 1$ *en* $w(q) = 1$, *zal ook* $w(p \wedge q) = 1$.

Definitie 2.7.3. *Een propositie* ϕ *heet een tautologie indien* $w(\phi) = 1$ *voor elke waardering* w.

Het is mogelijk om uit enkele tautologieën andere tautologieën af te leiden. Hiertoe bekijken we volgende twee stellingen:

Stelling 2.7.1. *Als* ϕ *en* $\phi \Rightarrow \psi$ *tautologieën zijn, dan is* ψ *een tautologie.*

Bewijs. Stel dat ψ onwaar is voor een bepaalde waardering w, dan zal, omdat ϕ een tautologie is, ϕ de waarde 1 aannemen en $\phi \Rightarrow \psi$ onwaar worden voor deze waardering. Dit is echter onmogelijk want we weten dat $\phi \Rightarrow \psi$ altijd waar is. We kunnen besluiten dat ψ nooit waarde 0 kan aannemen. □

Stelling 2.7.2. *Als* ϕ *en* ψ *tautologieën zijn, dan is* $\phi \wedge \psi$ *een tautologie.*

Bewijs. Triviaal, je mag dit zelf proberen met behulp van waarderingen. □

Definitie 2.7.4. *Een propositie heet een contradictie als en slechts als deze steeds onwaar is, d.w.z. dat voor een propositie* ϕ, $w(\phi) = 0$ *voor elke waardering* w.

Voorbeeld 2.7.4. *De formule* $(p \wedge \neg p)$ *is een contradictie. Dit kan je gemakkelijk afleiden uit de waarheidstabel:*

p	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$p)$
1	1	0	0	1
0	0	0	1	0
	1	3	2	1

Voorbeeld 2.7.5. *In het voorbeeld over het cadeau van vader in het begin van de tekst zei Ben: 'Ik heb het niet gedaan' en Daan zei: 'Ben heeft het gedaan'. Als we de uitspraak van Daan noteren met* p *en die van Ben met* $\neg p$, *geeft de waarheidstabel ons weer dat Ben en Daan niet samen de waarheid kunnen spreken, want we krijgen namelijk een contradictie. Natuurlijk was dit intuïtief ook duidelijk.*

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Om na te gaan of een formule een contradictie is, dienen we dus een waarheidstabel op te stellen, en vervolgens te kijken of de kolom onder het connectief met het grootste bereik alleen maar nullen bevat.
Het is duidelijk dat een formule nooit zowel een contradictie als een tautologie kan zijn. Er is echter wel een verband tussen de twee: $\neg\phi$ is een contradictie als en slechts als ϕ een tautologie is en ϕ is een contradictie als en slechts als $\neg\phi$ een tautologie is. Er bestaan uiteraard ook formules die geen van beide zijn, denk bijvoorbeeld aan de eenvoudige propositieletter p.

Maak hier oefeningen 21, 22 en 23 uit paragraaf 2.9.

2.7.1 Gelijkwaardige uitspraken

Aan de hand van equivalenties en tautologieën kunnen we gelijkwaardige uitspraken definiëren.

Definitie 2.7.5. *Gelijkwaardige uitspraken zijn uitspraken die dezelfde waarheidstabel hebben, d.w.z. dat de waarheidstabel van de equivalentie van de twee uitspraken een tautologie vormt. We noemen gelijkwaardige uitspraken soms ook logisch equivalente uitspraken.*

Voorbeeld 2.7.6. $p \Rightarrow q$ *en* $\neg p \vee q$ *zijn gelijkaardige uitspraken want:*

p	q	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\vee$	$q)$
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
		1	3	1	4	2	1	3	1

Maak hier oefeningen 24 en 25 uit paragraaf 2.9.

Uit de definitie van de modus tollens weten we dat $p \Rightarrow q$ en $\neg q \Rightarrow \neg p$ gelijkwaardige uitspraken zijn. Indien je aan deze logische equivalentie toch nog zou twijfelen, kan je het ook altijd nagaan met de waarheidstabel (zie oefening 23). We noemen deze equivalentie '*de wet van de contrapositie*'.

2.7.2 De wetten van De Morgan

'Het is niet waar dat het eerste petje rood is en dat het tweede petje (ook) rood is.' Dit is de negatie van een conjunctie. We kunnen deze uitspraak schrijven als $\neg(p \wedge q)$. Met welke uitspraak, zonder haakjes, is deze gelijkwaardig?

Verifieer je antwoord door de waarheidstabel op te stellen.

p	q	
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Bedenk (eventueel samen met je buur) een ander voorbeeld van een negatie van een conjunctie, in een wiskundige context deze keer.

Onderzoek analoog welke uitspraak equivalent is met $\neg(p \vee q)$ en vul het samenvattende kadertje onderaan zelf verder aan.

Verifieer je antwoord opnieuw door de waarheidstabel op te stellen.

p	q	
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Een aantal eigenschappen uit de logica hebben een speciale naam gekregen. De belangrijkste eigenschappen worden soms naar een persoon genoemd. Twee zeer belangrijke voorbeelden zijn de wetten van De Morgan, genoemd naar de Engelse wiskundige August De Morgan (1806-1871). Vul deze zelf aan:

1.

2.

Met behulp van de waarheidstabellen is het bewijs eenvoudig te geven. De wetten van De Morgan zijn vaak handig bij het ontkennen van proposities. We kunnen de wetten van De Morgan ook in woorden formuleren:

2.7.3 Enkele belangrijke tautologieën

Bepaalde vormen van tautologieën komen steeds weer terug. Hieronder vind je een overzicht van enkele belangrijke tautologieën. Je kan ze steeds aantonen door de waarheidstabel op te stellen. Doe dit voor enkele van de onderstaande uitspraken.

Tautologie	Naam
1. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	Commutativiteit van de conjunctie
2. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	Commutativiteit van de disjunctie
3. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$	Commutativiteit van de equivalentie
4. $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$	Associativiteit van de conjunctie
5. $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$	Associativiteit van de disjunctie
6. $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$	Associativiteit van de equivalentie
7. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	Distributiviteit van $\wedge$ t.o.v. $\vee$
8. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	Distributiviteit van $\vee$ t.o.v. $\wedge$
9. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	Idempotentie van de conjunctie
10. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$	Idempotentie van de disjunctie
11. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Dubbele ontkenning
12. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	Wet van de Contrapositie
13. $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$	Uit een contradictie volgt alles
14. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	
15. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	Wetten van De Morgan
16. $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$	Bewijs uit het ongerijmde
17. $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	Negatie van de implicatie
18. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Transitiviteit van de implicatie
19. $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$	Transitiviteit van de equivalentie
20. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	Uitdrukking van implicatie in $\neg, \vee$

Merk op dat er steeds equivalenties staan. Dit wil eigenlijk zeggen dat de uitspraken die links en rechts van het equivalentiesymbool staan, gelijkwaardig zijn.
Als je nu terugkijkt naar de twee bewijzen uit de inleiding en het bewijs van stelling 2.7.1, herken je de bewijsvormen?

Maak hier oefeningen 26, 27 en 28 uit paragraaf 2.9.

Logische schakelingen. Als je nu terugdenkt aan de logische schakelingen, denk je dat het nu wel mogelijk is schakelingen te maken die $A \Rightarrow B$ en $A \Leftrightarrow B$ voorstellen? Zo ja, teken ze. Denk na over een voorstelling met en zonder poorten.

Definitie 2.7.6. *We noemen twee schakelingen gelijkwaardig als de output hetzelfde is bij dezelfde stand van schakelaars, d.w.z. dat de uitspraken die het circuit weergeven, gelijkwaardige uitspraken zijn. De schakeling waarin het minste schakelaars voorkomen, noemen we de eenvoudigste.*

Maak hier oefeningen 29 en 30 uit paragraaf 2.9.

Disjunctieve en conjunctieve normaalvorm.

Stelling 2.7.3. *Zij ϕ een (samengestelde) propositie. Dan is ϕ logisch equivalent met een propositie ψ die bestaat uit disjuncties van conjuncties van de propositieletters of negaties van de propositieletters. We zeggen dat ψ in disjunctieve normaalvorm is.*

Bewijs. Als ϕ geen samengestelde propositie is, maar een enkele propositieletter, is het bewijs triviaal.
Als ϕ echter een samengestelde propositie is, moeten we ervoor zorgen dat we de equivalenties en implicaties kunnen wegwerken. Een equivalentie kunnen we wegwerken doordat we weten dat dit een dubbele implicatie is: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Door gebruik te maken van formule 20 ($(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$), kunnen we ook de implicaties wegwerken. Door gebruik te maken van de wetten van De Morgan, kunnen we negaties steeds doorschuiven tot vlak voor de propositieletters. Tenslotte kan je dan de distributiviteit van $\wedge$ t.o.v. $\vee$ toepassen. □

Voorbeeld 2.7.7. $\neg(p \wedge q) \wedge (r \vee \neg q)$ *is niet in disjunctieve normaalvorm. We hebben echter volgende logische equivalenties:*

$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg q)$	*De Morgan*
$\Leftrightarrow$	$[(\neg p \vee \neg q) \wedge r] \vee [(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg q]$	*Distributiviteit van $\wedge$ t.o.v. $\vee$*
$\Leftrightarrow$	$[(\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r)] \vee [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg q)]$	*Distributiviteit van $\wedge$ t.o.v. $\vee$*
$\Leftrightarrow$	$(\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg q)$	*Haakjes weglaten*

De laatste zin is in disjunctieve normaalvorm.

Maak hier oefening 31 uit paragraaf 2.9.

Stelling 2.7.4. *Zij ϕ een (samengestelde) propositie. Dan is ϕ logisch equivalent met een propositie ψ die bestaat uit conjuncties van disjuncties van de propositieletters of negaties van de propositieletters. We zeggen dat ψ in conjunctieve normaalvorm is.*

Bewijs. Je kan hierbij volledig analoog te werk gaan als bij de disjunctieve normaalvorm. □

2.8 Propositielogica met de TI-83/84

In het TEST-menu (onder LOGIC) van de TI-83/84 kom je de conjunctie tegen als ‘and’, de inclusieve disjunctie als ‘or’, de exclusieve disjunctie als ‘xor’ en de negatie als ‘not’. De bewerkingen and, or, xor en not resulteren in een waarde 1 (waar) of 0 (niet waar).
De uitdrukking ‘$3 < 6$ and $9 > 8$’ zal bijvoorbeeld waarde 1 opleveren. Waarom? Controleer dit zelf met je grafische rekenmachine. De gelijkheidstekens vind je ook terug in het TEST-menu (onder TEST).

Maak hier oefening 34 uit paragraaf 2.9.

We zullen logische uitspraken nu gebruiken bij het genereren van de grafiek van een functie met meervoudig voorschrift. Stel dat de functie f die bestaat uit de volgende twee voorschriften gegeven is:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \text{ als } 0 \leq x \leq 10$$

en

$$f(x) = 1000 - \frac{1}{2}(20 - x)^3 \text{ als } 10 < x \leq 20$$

Tegen welk probleem loop je aan als je met je grafische rekenmachine de grafiek van f wilt tekenen?
Om de grafiek te plotten van de functie f kunnen we als volgt te werk gaan.
Voer in je grafische rekenmachine in:

$$Y_1 = 0.5x^3$$

$$Y_2 = 1000 - 0.5(20 - x)^3$$

$$Y_3 = Y_1 * (x \leq 10) + Y_2 * (x > 10)$$

Om Y_1 en Y_2 hier in te voeren, maken we gebruik van het VARS menu. Toets [VARS], kies voor het menu [Y-VARS] en kies hier optie 1: Function. Hier kan je de gewenste Y-variabelen kiezen.
Kies dan

$$Ymin = -100, \quad Ymax = 1000.$$

Wat zou je kiezen voor $Xmin$ en $Xmax$? Je moet nu zorgen dat je enkel Y_3 laat tekenen. Waarom? Leg uit waarom we de gewenste grafiek bekomen.

Gödel

In de 20^{ste} eeuw kwam *Gödel*, een Oostenrijker en één van de briljantste logici uit deze eeuw. De in 1931 gepubliceerde stelling van Gödel betekende een domper voor vele logici en filosofen. Dit kwam omdat zij inhoudt dat binnen elk strikt logisch wiskundig systeem uitspraken of vragen bestaan die niet kunnen worden bewezen of weerlegd dan wel beantwoord op basis van de axioma's binnen dat systeem. Deze weerslag wordt nog steeds gevoeld en bediscussieerd. Gödels' stelling maakt een einde aan de eeuwenlange zoektocht naar axioma's die een onaantastbare grondslag voor de hele wiskunde zouden moeten vormen. Gödel is verder nog belangrijk omwille van een aantal vermoedens die hij uitte. Het kan echter nog eeuwen duren vooraleer sommige van zijn belangrijkste vermoedens worden bevestigd of weerlegd. Gödel is een belangrijk figuur omdat sinds zijn verschijning de wiskundige logica implicaties heeft voor de filosofie, computerwetenschappen . . .

We zullen kort uitleggen waarom Gödels' stelling dergelijke invloed heeft op de computerwetenschappen. Computers worden verplicht om logische regels te gebruiken zonder hierbij gebruik te maken van enige intuïtie of zonder hen het systeem van buitenaf te laten bekijken. Gödels ideeën hebben enige resultaten i.v.m. de limieten van de computationele procedures blootgelegd, bijvoorbeeld, de onoplosbaarheid van het stopzettingsprobleem. Misschien heeft iemand onder jullie al eens een computerprogramma geschreven. Dan heb je misschien al ervaren dat het mogelijk is dat ten gevolge van één programmeerfout, het programma in een oneindige lus geraakt, d.w.z. dat het voor eeuwig en altijd zal blijven lopen (tot het van buitenaf wordt afgebroken). De vraag die het stopzettingsprobleem stelt is of er een algoritme bestaat dat eender welk computerprogramma kan onderzoeken op het oneindig doorlopen. Het algoritme beslist dus of het programma uiteindelijk stopgezet wordt, of eeuwig blijft doorlopen. Het antwoord hierop is door Göbel ontdekt en is helaas negatief.

Figuur 2.12: Albert Einstein en Kurt Gödel (± 1950).

2.9 Oefeningen

Oefening 2.9.1. *Zijn volgende uitspraken proposities? Waarom wel/niet?*

1. *Hoe laat is het?*
2. *Parijs ligt in België.*
3. *Kijk uit wat je doet!*
4. *Evi Van Acker won een bronzen medaille zeilen op de olympische spelen in Londen (2012).*
5. *3 is kleiner dan 2.*
6. $(a+b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.
7. *Anderlecht is beter dan Club Brugge.*

Oefening 2.9.2. *Zoek nu voor je buurman of buurvrouw enkele voorbeelden van uitspraken die waar/onwaar zijn (m.a.w. proposities) en van uitspraken in de omgangstaal en laat hem/haar nagaan wat het is.*

Oefening 2.9.3. *Benoem de kleinst mogelijke deeluitspraken met* $p, q, r \ldots$ *en schrijf de volgende proposities zoals in het voorbeeld.*

1. *Als meneer Jacobs blij is, is mevrouw Jacobs dat niet en als meneer Jacobs niet blij is, is mevrouw Jacobs dat wel.*
2. *Ik ga met de fiets en ik neem een boek mee, of ik kom op een andere manier en neem geen boek mee, maar wel een bos bloemen.*
3. *Tim gaat naar de cinema als en slechts als er een goede film speelt.*
4. *Als de baas van Google Mark Zuckerberg ontmoet heeft en hij had geen chequeboek bij, dan is hij niet ingegaan op het voorstel om in Facebook te investeren.*

Oefening 2.9.4. *Vul bij de volgende formules de haakjes verder aan in de volgorde waarop we de formule moeten interpreteren.*

1. $p \Rightarrow \neg q \Rightarrow r$
2. $p \Rightarrow \neg\neg q$
3. $p \vee \neg(q \Rightarrow p \vee q)$

4. $r \Rightarrow \neg(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge p \Leftrightarrow q$

Oefening 2.9.5. *Haal zo veel mogelijk haakjes weg uit onderstaande formules zodat de interpretatie nog wel dezelfde blijft.*

1. $((q \Rightarrow (\neg p)) \wedge r)$
2. $(((p \wedge (\neg q)) \wedge r) \vee s)$
3. $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg(r \vee s)))$
4. $(\neg((\neg(\neg(p \vee q))) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)))$

Oefening 2.9.6. *Hier staan 3 antwoorden:*

- *Antwoord A.*
- *Antwoord A of B.*
- *Antwoord B of C.*

Er is slechts één goed antwoord op de volgende vraag: 'Welk antwoord kan alleen goed zijn?'

Oefening 2.9.7. *Schrijf volgende uitspraken als formules met p = 'Johan is intelligent' en q = 'Martha is intelligent'.*

1. *Johan is intelligent en Martha niet.*
2. *Martha is intelligent en Johan niet.*
3. *Johan en Martha zijn beiden niet intelligent.*
4. *Johan is intelligent of Martha is niet intelligent.*
5. *Johan noch Martha is intelligent.*
6. *Johan is niet intelligent, maar Martha wel.*
7. *Het is niet waar dat Johan en Martha beiden niet intelligent zijn.*
8. *Johan is niet intelligent als en alleen als Martha intelligent is.*

Oefening 2.9.8. *Als Johan en Martha allebei intelligent zijn, welke uitspraken uit de vorige oefening zijn dan ware uitspraken?*

Oefening 2.9.9. *We keren nu de rollen om. Geef een verbale vertaling voor volgende termen als je weet dat p = 'ik heb een kat' en q = 'ik heb een hond'.*

1. $p \wedge \neg q$
2. $\neg(p \wedge q)$
3. $\neg p \vee \neg q$
4. $\neg(\neg p \vee \neg q)$
5. $(\neg\neg p) \vee (\neg\neg q)$
6. $\neg(\neg p \vee \neg\neg q) \wedge \neg\neg q$

Oefening 2.9.10. *Denk zelf eens na over de waarheidstabel voor* $\neg\neg p$.

Oefening 2.9.11. *Met behulp van de waarheidstabel voor* $\wedge$ *zijn we in staat de waarheistabel voor meer ingewikkelde formules te vinden. Probeer de waarheidstabel voor* $p \wedge \neg q$ *te vinden.*

Oefening 2.9.12. *Stel de waarheidstabel op van de exclusieve of.*

Oefening 2.9.13. *Bereken de waarheidstabel voor* $(p \wedge \neg q) \vee q$.

Oefening 2.9.14. *Ga de waarheidstabel voor de formule* $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ *na.*

Oefening 2.9.15. *Geef intuïtief aan of de volgende beweringen waar of onwaar zijn. Ga daarbij uit van de ware formule* $p \Rightarrow q$*, dus ALS* p *dan* q.

1	*p, dus q*	*Waar/Onwaar*
2	*q, dus p*	*Waar/Onwaar*
3	*niet p, dus niet q*	*Waar/Onwaar*
4	*niet q, dus niet p*	*Waar/Onwaar*
5	*p, dus niet q*	*Waar/Onwaar*
6	*niet p, dus q*	*Waar/Onwaar*
7	*niet p, dus:* $p \Rightarrow q$ *is waar*	*Waar/Onwaar*

Oefening 2.9.16. *Vul dit schema nogmaals in als je voor* p *en* q *de volgende uitspraken neemt:* $p =$ *'het sneeuwt',* $q =$ *'Gert komt niet naar school'. We krijgen dus: 'ALS het sneeuwt, dan komt Gert niet naar school'.*

1	*p, dus q (het sneeuwt, dus Gert komt niet naar school)*	*Waar/Onwaar*
2	*q, dus p (Gert komt niet naar school, dus het sneeuwt)*	*Waar/Onwaar*
3	*niet p, dus niet q (het sneeuwt niet, dus Gert komt naar school)*	*Waar/Onwaar*
4	*niet q, dus niet p (Gert komt naar school, dus het sneeuwt niet)*	*Waar/Onwaar*
5	*p, dus niet q (het sneeuwt, dus Gert komt naar school)*	*Waar/Onwaar*
6	*niet p, dus q (het sneeuwt niet, dus Gert komt niet naar school)*	*Waar/Onwaar*
7	*niet p, dus: $p \Rightarrow q$ is waar (het sneeuwt niet, dus 'als het sneeuwt, komt Gert niet naar school', is waar)*	*Waar/Onwaar*

Vergelijk je antwoorden met de vorige oefening, heb je ergens verschillend geantwoord?

Oefening 2.9.17. *Petra wil vrijdagavond uitgaan en belt haar vriendinnen op met de vraag wie er zin heeft om mee te gaan. De vriendinnen hebben allemaal zo hun eisen. De antwoorden die Petra ontvangt, zijn de volgende:*
Marieke: 'Ja ik wil wel mee als we minimaal met z'n drieën zijn. En als Laura meegaat, dan moet Natasja ook meegaan.'
Natasja: 'Ja, ik ga mee, maar alleen als Laura en Marieke ook meegaan.'
Laura: 'Ik ga mee, maar niet als Marieke en Natasja allebei meegaan.'

Petra wil graag uitgaan, dus ze laat zich leiden door de eisen van haar vrienden. Laten we voor de gemakkelijkheid de vrienden van Petra de volgende propositieletters geven:
M: Marieke (waarde 1 als Marieke meegaat)
N: Natasja (waarde 1 als Natasja meegaat)
L: Laura (waarde 1 als Laura meegaat)
De vraag is nu: wie gaat er vrijdagavond uit en wie blijft thuis?
Een tip hierbij is om Marieke, Natasja en Laura equivalent te stellen aan hun eisen. Door hun eisen om te zetten in formules, kan je met de waarheidstabel op zoek gaan naar een situatie waar aan alle drie de eisen voldaan is. Je kan eventueel de formules samen opstellen met je buur.

Oefening 2.9.18. *Wiskundige stellingen hebben vaak een zeer precieze betekenis. Toch gebeurt het soms dat ze verkeerd begrepen en/of toegepast worden. Dit kan vermeden worden door hun logische structuur te doorgronden en die correct te interpreteren, d.w.z. volgens de regels van de logica. Vele eigenschappen kunnen als een implicatie geformuleerd worden. Bijvoorbeeld de eigenschap 'als een geheel getal deelbaar is door 4, dan is het ook deelbaar door 2' kan herschreven worden tot: 'een geheel getal n is deelbaar door 4 $\Rightarrow$ n is deelbaar door 2'. Doe hetzelfde voor onderstaande wiskundige uitspraken met behulp van de connectieven. Je mag propositieletters gebruiken, maar dat hoeft niet.*

1. *Als een geheel getal deelbaar is door 12, dan is het deelbaar door 2 en 3.*
2. *Een geheel getal is deelbaar door 6 als het deelbaar is door 2 en door 3.*
3. *Een driehoek met zijden a, b en c is rechthoekig als $a^2 = b^2 + c^2$.*
4. *De diagonalen van een parallellogram snijden elkaar middendoor.*
5. *Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de middellijn door het raakpunt.*
6. *Een driehoek is gelijkbenig als en slechts als hij twee gelijke hoeken heeft.*
7. *Een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke hoeken.*
8. *Een getal is deelbaar door 5 als het eindigt op een 0 of een 5.*
9. *In de ruimte zijn niet-snijdende rechten evenwijdig of kruisend.*
10. *Voor een functie die afleidbaar is in a en die een extremum bereikt in a geldt dat $f'(a) = 0$.*

Oefening 2.9.19. *Kunnen we de volgende implicaties omdraaien om er eventueel een equivalentie van te maken? Zo ja, formuleer deze equivalentie.*

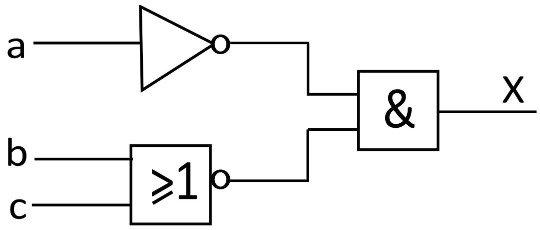
1. *Als je dit medicijn neemt, dan word je beter.*

2. *Als je huiswerk af is, mag je TV kijken.*

3. *Als het regent, opent Leona haar paraplu.*

4. *Als in een driehoek de drie zijden even lang zijn, dan zijn de drie hoeken even groot.*

Oefening 2.9.20. *Stel de waarheidstabel op van de schakeling hieronder afgebeeld en leid de formule af.*



Figuur 2.13: Schakeling oefening 20

Oefening 2.9.21. *Ga na of de formule* $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ *een tautologie is. Wat herken je in deze formule?*

Oefening 2.9.22. *Ga voor elk van de volgende formules na of het een tautologie of een contradictie is.*

1. $p \Leftrightarrow \neg p$

2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

3. $\neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$

Oefening 2.9.23. *Toon door middel van waarheidstabellen de modus tollens aan.*

Oefening 2.9.24. *Construeer de waarheidstabellen van de volgende uitspraken en controleer welke uitspraken gelijkwaardig zijn.*

1. $p \wedge q$	*5.* $p \wedge \neg q$
2. $p \Rightarrow \neg q$	*6.* $\neg q \Rightarrow \neg p$
3. $\neg p \vee \neg q$	*7.* $p \Rightarrow q$
4. $\neg p \vee q$	*8.* $\neg(\neg p \vee \neg q)$

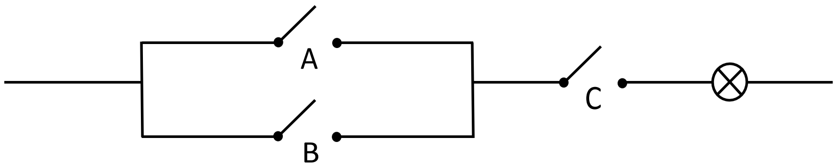
Oefening 2.9.25. *Construeer een samengestelde uitspraak, die gelijkwaardig is met* $p \vee q$ *door enkel* $\neg$ *en* $\wedge$ *te gebruiken.*

Oefening 2.9.26. *We weten reeds dat een waarheidstabel een algemene methode geeft om na te gaan of een propositie een tautologie is. Als de zin n propositiesymbolen bevat, moeten we in de waarheidstabel* 2^n *verschillende waarderingen beschouwen. Als n groot is, zal ons dit dus enorm veel werk geven. In sommige gevallen kunnen we sneller te werk gaan door gebruik te maken van de belangrijke tautologieën. Toon aan dat* $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ *een tautologie is, zonder een waarheidstabel op te stellen.*

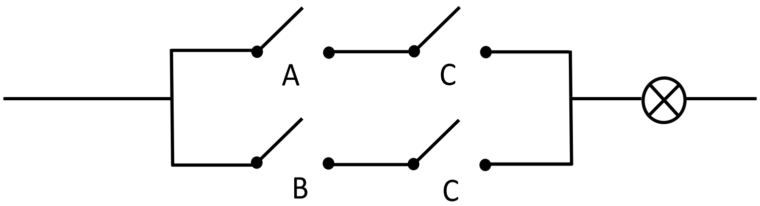
Oefening 2.9.27. *Toon aan dat* $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow r)$ *een tautologie is, zonder een waarheidstabel op te stellen.*

Oefening 2.9.28. *Toon aan dat* $((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow q)$ *een tautologie is zonder een waarheidstabel op te stellen.*

Oefening 2.9.29. *Bekijk de schakelingen in figuur 2.14 en 2.15.*



Figuur 2.14: Schakeling 1



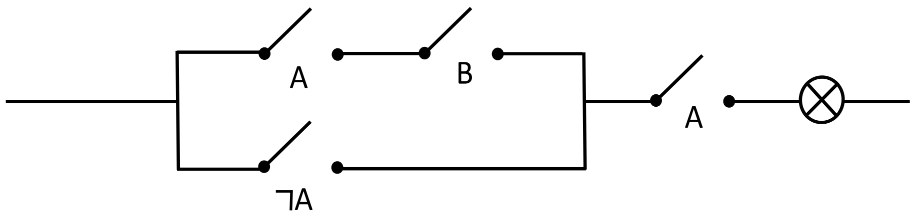
Figuur 2.15: Schakeling 2

Zijn de twee schakelingen gelijkwaardig? Waarom wel/niet?

Oefening 2.9.30. *Vereenvoudig de schakeling uit figuur 2.16. Teken hierbij ook de vereenvoudigde schakeling.*

Oefening 2.9.31. *Is* $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \vee q)$ *in disjunctieve normaalvorm? Zo nee, zet de formule om via logische equivalenties.*

Oefening 2.9.32. *Denk na over de uitkomsten die volgende uitdrukkingen zullen opleveren:*



Figuur 2.16: Schakelingen vereenvoudigen

1. $9 < 10$ *or* $1 < 2$
2. $3 \neq 8$ *xor* $2 < 4$
3. $3 \neq 8$ *and* $2 < 4$
4. *Ga met behulp van je grafische rekenmachine na of je antwoorden juist zijn door de uitdrukkingen in je rekenmachine in te tikken.*

Extra oefeningen

Oefening 2.9.33. *Zijn de volgende uitspraken proposities? Waarom wel/niet?*

1. *2 is oneven.*
2. $1 + 1 = 2$.
3. $13 + 5$.
4. *Kom onmiddellijk terug!*
5. *Elke vierkant is een rechthoek.*
6. *Heb je honger?*
7. *Spaghetti is lekker.*
8. *Ik heb honger.*

Oefening 2.9.34. *Vertaal onderstaande zinnen naar formules in de propositielogica, leg steeds uit waar je propositieletters voor staan.*

1. *Als ik een driehoek heb, dan is de hoekensom* 180^o.
2. *Als ik roep dat ik thuis ben en Lien is thuis, dan geeft zij geen antwoord.*
3. *Als het mooi weer is en ik heb geen huiswerk, dan ga ik naar het strand.*

Oefening 2.9.35. *Kijk of onderstaande formules correcte formules vormen volgens de propositielogica. Zo ja, vul de haakjes verder aan in de volgorde waarop we de formule moeten interpreteren.*

1. $r \vee \neg p \wedge q$
2. $p \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \wedge (q \vee r)))$
3. $((p \Rightarrow q \wedge (r \vee s) \wedge (p \vee s))$
4. $\neg\neg p \Leftrightarrow p \Leftrightarrow q \vee r$

Oefening 2.9.36. *Tijdens de les wiskunde tekent de leerkracht een parallellogram op het bord en vraagt de leerlingen zoveel mogelijk stellingen te formuleren i.v.m. deze vierhoek. Er komen verschillende antwoorden, die op het bord genoteerd worden:*

- *Annick zegt: 'In een parallellogram zijn de overstaande hoeken even groot.'*

- *Bavo zegt: 'Zijn in een vierhoek de overstaande hoeken even groot, dan is de vierhoek een parallellogram.'*
- *Chris zegt: 'Een vierhoek is een parallellogram als de overstaande hoeken even groot zijn.'*
- *Daan zegt: 'Een vierhoek is slechts dan een parallellogram als de overstaande hoeken even groot zijn.'*
- *Ellen zegt: 'Een vierhoek is een parallellogram als en slechts als de overstaande hoeken even groot zijn.'*
- *Frans zegt: 'Een vierhoek die geen parallellogram is, heeft geen gelijke overstaande hoeken.'*
- *Sebastiaan zegt: 'Ofwel heeft een vierhoek geen gelijke overstaande hoeken, ofwel is het een parallellogram.'*
- *Hanna zegt: 'Ofwel heeft een vierhoek gelijke overstaande hoeken, ofwel is het geen parallellogram.'*

Let ook op dat de leerlingen natuurlijk bedoelen dat ieder paar overstaande hoeken even groot is als ze zeggen dat de overstaande hoeken even groot zijn.
Laten we nu de uitspraak 'een vierhoek is een parallellogram' voorstellen door p en 'een vierhoek heeft gelijke overstaande hoeken' door q.

1. *Vertaal de uitspraken van Annick en Bavo in termen van p en q.*
2. *De uitspraken van Chris en Daan lijken erg op elkaar, maar toch zijn ze fundamenteel verschillend. Bij één van beiden is er maar één manier om aan te tonen dat een vierhoek een parallellogram is, bij de andere zouden er meer kunnen zijn. Bij wie is het eerste en bij wie is het laatste geval van toepassing? Kan je, in het laatste geval, een andere manier bedenken?*
3. *Indien q de enige manier is om p te realiseren, komt dit dan overeen met $q \Rightarrow p$ of $p \Rightarrow q$?*
4. *Vertaal de uitspraken van Chris en Daan nu in termen van p en q.*
5. *Hoe zou je de uitspraak van Ellen vertalen in termen van p en q?*
6. *Stel voor de vertalingen van Sebastiaan en Hanna een waarheidstabel op en onderzoek met welke van de eerdere uitspraken ze overeenkomen.*
7. *Doe nu hetzelfde voor Frans.*

8. *Hoeveel verschillende bewijzen zijn er nodig om alle genoteerde uitspraken aan te tonen?*

Oefening 2.9.37. *Welke verdere waarheidswaarden kunnen we afleiden uit het volgende:*

1. $$\begin{array}{cccccc} \neg & p & \vee & (p & \Rightarrow & q) \\ & & & & 0 & \end{array}$$

2. $$\begin{array}{ccccccccc} \neg & (p & \wedge & q) & \Leftrightarrow & \neg & p & \Rightarrow & \neg & q \\ & & 1 & & & & & & & \end{array}$$

3. $$\begin{array}{ccccccccc} (\neg & p & \vee & q) & \Rightarrow & (p & \Rightarrow & \neg & r) \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

4. $$\begin{array}{cccccccc} (p & \Leftrightarrow & q) & \Leftrightarrow & (r & \Rightarrow & \neg & p) \\ & 0 & & 1 & & & & \end{array}$$

Oefening 2.9.38. *Als* $p = 1$, $q = 1$ *en* $r = 0$, *wat zijn dan de waarheidswaarden van de volgende proposities:*

1. $p \vee r$
2. $p \wedge r$
3. $\neg p \wedge \neg r$
4. $p \Leftrightarrow \neg q \vee r$
5. $q \vee \neg r \Rightarrow p$
6. $(q \vee p) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$
7. $(q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$
8. $(q \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow q))$

Oefening 2.9.39. *Als je weet dat* $p \Rightarrow q$ *waar is, wat kunnen we dan afleiden i.v.m. de waarheidswaardes van volgende formules?*

1. $p \vee r \Rightarrow q \vee r$
2. $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$

Oefening 2.9.40. *Ga na of de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn.*

1. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$ *en* p.

2. $(p \Leftrightarrow q)$ *en* $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.
3. $((\neg p) \vee q)$ *en* $((\neg q) \vee p)$.
4. $(\neg(p \Leftrightarrow q))$ *en* $(p \Leftrightarrow (\neg q))$.
5. $(p \vee (q \Leftrightarrow r))$ *en* $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r))$.
6. $(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r))$ *en* $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r))$.
7. $(p \wedge (q \Leftrightarrow r))$ *en* $((p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r))$.

Oefening 2.9.41. *Ga na of de volgende uitspraken tautologieën zijn*

1. $p \Rightarrow p \vee q$
2. $p \Rightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q)$
3. $((p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee s)) \Leftrightarrow \neg\neg((p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee s))$
4. $p \Rightarrow ((\neg p \wedge q) \Leftrightarrow q)$
5. $(p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (p \Rightarrow q)$
6. $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
7. $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
8. $(p \Rightarrow q) \vee (\neg p)$
9. $\neg[(\neg p \wedge \neg q) \vee r] \Rightarrow (p \vee q)$
10. $((p \Rightarrow q) \wedge p)$
11. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
12. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge (\neg q))$
13. $(p \vee (\neg r)) \Leftrightarrow q$
14. $p \wedge \neg p \Rightarrow q$

Oefening 2.9.42. *Toon aan dat* $[(s \Rightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow r)) \wedge (s \Rightarrow \neg r)] \Rightarrow [s \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$ *een tautologie is, zonder een waarheidstabel op te stellen. Merk hierbij op dat we* $2^4 = 16$ *waarderingen zouden moeten beschouwen indien we het wel met een waarheidstabel zouden oplossen!*

Oefening 2.9.43. *Toon aan dat*

$$(\neg t \vee s) \Rightarrow [(q \vee \neg r) \Rightarrow (t \vee p) \Rightarrow ((\neg(q \vee \neg r) \Rightarrow t) \wedge (s \vee p))]$$

een tautologie is.

Oefening 2.9.44. *Is* $[(p \wedge r) \Rightarrow \neg q] \wedge (q \vee r)$ *in disjunctieve normaalvorm? Zo nee, zet de formule om via logische equivalenties.*

Hoofdstuk 3

Predicatenlogica

Denk terug aan het syllogisme van Aristoteles waar we het over hadden tijdens een klein stukje geschiedenis:

Alle mensen zijn sterfelijk,
Socrates is een mens,
DUS Socrates is sterfelijk.

Denk je dat je dit kan voorstellen in de propositielogica?

Hieronder vind je een verzwakte versie:

Als Socrates een mens is, dan is Socrates sterfelijk.
Socrates is een mens,
DUS Socrates is sterfelijk.

Kan je deze voorstellen in de propositielogica?

3.1 Bouwstenen van de predicatenlogica

3.1.1 Predicaten en predicaatsymbolen

In de predicatenlogica kunnen we ook de interne structuur van uitspraken zichtbaar maken.

Voorbeeld 3.1.1. *De uitspraak 'Judith kan schaken' konden we in de propositielogica alleen weergeven door een eenvoudige propositieletter. In de predicatenlogica kunnen we deze uitspraak weergeven als $S(j)$ waarbij S staat voor de eigenschap 'kunnen schaken' die toekomt aan het object j, Judith. De eigenschap staat steeds voorop, het object er tussen haakjes achteraan.*

Voorbeeld 3.1.2. *Ook de uitspraak '$x > 0$' kunnen we op deze manier voorstellen. Als P staat voor de eigenschap 'positief zijn', stellen we de uitspraak voor door $P(x)$.*

Zie je het verschil tussen de twee voorbeelden?

We stelden Judith voor door j en noemen dit *een constante*. De x uit het tweede voorbeeld noemen we een *variabele*.

Definitie 3.1.1. *Een predicaat is een propositie die afhangt van één of meer variabelen. Predicaten worden op dezelfde manier genoteerd als functies, bijvoorbeeld $S(x)$.*

Herinner je dat een propositie een uitspraak is die ofwel waar, ofwel onwaar is. Bij een predicaat hebben we te maken met variabelen, waardoor we de waarheidswaarde niet onmiddellijk kunnen bepalen. We kunnen dit wel als we een waarde (anders gezegd, een constante) invullen voor deze variabele.

Voorbeeld 3.1.3. *Een voorbeeld van een predicaat is de bewering $x > 0$. Als we dit predicaat de naam P geven, dan noteren we dit als $P(x)$. De waarheidswaarde van dit predicaat kunnen we vaststellen als bekend is wat nu precies de waarde van x is. Stel dat $x = 1$, dan is $P(x)$ waar. We kunnen even goed zeggen dat $P(1)$ waar is. Omdat het waarheidsgehalte van $P(1)$ wel te bepalen is, kunnen we stellen dat $P(1)$ een propositie is.*

Kijk nu opnieuw naar het voorbeeld 'Judith schaakt', kunnen we daar het waarheidsgehalte bepalen?

Predicaten kunnen ook van meer dan één variabele afhangen.

Voorbeeld 3.1.4. *$x > y$ kunnen we bijvoorbeeld gelijkstellen met het predicaat $Q(x, y)$. Invullen van één variabele zou dan nog steeds een predicaat opleveren. Als we bijvoorbeeld $y = 0$ zouden stellen, krijgen we $Q(x, 0)$ en dit is logisch equivalent met $P(x)$ uit het vorige voorbeeld, omdat voor iedere waarde van x, de waarde van $Q(x, 0)$ en $P(x)$ gelijk zijn.*

We gebruiken hoofdletters $A, \ldots, Z$ om predicaten aan te geven, d.w.z. eigenschappen van objecten en relaties tussen objecten. We noemen ze de *predicaatsymbolen*. We kiezen over het algemeen letters die gemakkelijk te onthouden zijn (meestal overeenkomend met de eerste letter van een belangrijk woord in de eigenschap of relatie). Maar logisch gezien is er geen enkel verband tussen een letter en de daarmee bedoelde eigenschap. Meestal gebruiken we kleine letters $u, v, \ldots, z$ als variabelen en $a, \ldots, t$ als constanten.

Voorbeeld 3.1.5. *De uitspraak 'Marie is een wiskundige' geven we weer als $W(m)$ met W:'is wiskundige' en de constante m staat voor 'Marie'. Als het erg voor de hand ligt, laten we deze 'vertaalsleutel' vaak achterwege.*

We weten ook dat predicaten relaties tussen objecten kunnen weergeven. Dit wordt geïllustreerd in volgend voorbeeld.

Voorbeeld 3.1.6. *'Jan houdt van Marie', kunnen we voorstellen als $H(j, m)$.*

Definitie 3.1.2. *We zeggen dat het predicaatsymbool H* tweeplaatsig *is. Het predicaatsymbool P uit het vorig voorbeeld, noemen we* éénplaatsig*. Er zijn ook drieplaatsige, vierplaatsige of nog algemener, n-plaatsige predicaatsymbolen.*

Voorbeeld 3.1.7. *'Jan geeft Marie het boek', kunnen we weergeven als $G(j, m, b)$.*

Maak hier oefening 1 uit paragraaf 3.3.

Eerder stelden we $x > y$ gelijk met $Q(x, y)$. Eigenlijk zou het hier handiger zijn het teken $>$ te gebruiken als predicaatsymbool. We spreken af dat dit mag. Zo worden ook $<, +, = \ldots$ in de logische taal opgenomen. We noemen dit de *functiesymbolen*. Ook functiesymbolen kunnen n-plaatsig zijn. Het symbool '+' is bijvoorbeeld een tweeplaatsig functiesymbool, terwijl $\sqrt{}$ en ^{2} éénplaatsige functiesymbolen zijn. Merk hierbij op dat als we in de logica $1 + 1$ schrijven, dit niet gelijk is aan 2. Het eerste is geen logische uitspraak maar enkel een rijtje van symbolen en het tweede is een enkel symbool. Het is geen logische uitspraak omdat we aan $1 + 1$ geen waarheidswaarde kunnen koppelen. Zo is $1 + 1 = 2$ wel een logische uitspraak, namelijk een ware logische uitspraak.

We weten dat we een propositie krijgen als alle variabelen constanten zijn. Hoewel we geen gebruik maken van propositieletters, kunnen we er wel de propositielogica op toepassen. We zullen de connectieven uit de propositielogica ook gebruiken voor predicaten, ook al zijn die in de regel geen proposities. Stel dat $P(x)$ en $Q(x)$ predicaten zijn, dan stellen we bijvoorbeeld de conjunctie voor door $(P \wedge Q)(x)$ of $P(x) \wedge Q(x)$. We kunnen dus bijvoorbeeld de predicaten $x > 0$ en $x < 2$ samenstellen tot een nieuw predicaat: $x > 0 \wedge x < 2$. Op dezelfde manier kunnen we ook predicaten combineren met de andere connectieven. Dezelfde eigenschappen blijven gelden als voor proposities. Zo is bijvoorbeeld $P(x) \Rightarrow Q(x)$ nog steeds logisch equivalent met $\neg P(x) \vee Q(x)$.

Bij het samenstellen van predicaten moet je wel opletten. Sommige predicaten stel je samen tot een nieuw predicaat afhankelijk van dezelfde variabele. Maar soms kan je ook predicaten combineren tot een nieuw predicaat afhankelijk van meerdere variabelen. Bijvoorbeeld $P(x)$ en $Q(y)$ zijn allebei afhankelijk van één variabele. Maar $P(x) \vee Q(y)$ is afhankelijk van zowel x als y.

Maak hier oefening 2 uit paragraaf 3.3.

3.1.2 Universele kwantor

Kijk naar de laatste opgave van oefening 2 en vergelijk deze met de volgende, algemenere uitspraak.

'Voor alle x geldt dat als x groter is dan 3 en een priemgetal is, x oneven is'.

Voldoet je antwoord uit oefening 2 hieraan?

Deze uitspraak is echter toch eenvoudig uit te drukken in de predicatenlogica, met behulp van de kwantor $\forall$ die wordt uitgesproken als 'voor alle' of 'voor elke'. De formule die we bekomen is

$$\forall x(x > 3 \wedge P(x)) \Rightarrow O(x).$$

Definitie 3.1.3. *We noemen het symbool* $\forall$ *de* universele kwantor *of* al-kwantor.

Voorbeeld 3.1.8. *'Alle wiskundigen kunnen schaken', kunnen we vertalen naar de predicatenlogica*

$$\forall x(W(x) \Rightarrow S(x))$$

Dus voor alle x *geldt dat als* x *een wiskundige is, dat* x *kan schaken.*

Maak hier oefening 3 uit paragraaf 3.3.

3.1.3 Existentiële kwantor

De universele kwantor is zeer handig bij uitspraken die steeds waar zijn. Soms zijn er ook uitspraken die slechts soms waar zijn. Als men bijvoorbeeld zegt 'Jan houdt van iemand', weten we dat er ergens iemand rondloopt van wie Jan houdt. Om dit uit te drukken, moeten we een tweede kwantor invoeren, namelijk $\exists$. We spreken deze uit als 'er bestaat een' of 'voor minstens één'.

Definitie 3.1.4. *De kwantor* $\exists$ *noemen we de* existentiële kwantor.

Voorbeeld 3.1.9. *'Jan houdt van iemand' kunnen we in de predicatenlogica voorstellen als* $\exists x H(j,x)$*. Er bestaat dus een* x *waarvoor geldt dat Jan ervan houdt.*

We hebben nu gezien wat we kunnen doen als een uitspraak steeds waar is en als een uitspraak slechts soms waar is. We hebben echter nog niet gezien hoe we moeten formuleren dat een uitspraak nooit waar is. Dat kan men echter afleiden uit de existentiële kwantor want als het nooit waar is, wil dit zeggen dat 'er geen enkele x bestaat waarvoor het geldt', wat precies de ontkenning van de existentiële kwantor is. We bewijzen dit voor een willekeurig predicaat $H(x)$.

Bewijs.

$$\begin{array}{cc} & \neg(\exists x)H(x) \\ \Leftrightarrow & \neg[H(a) \vee H(b) \vee H(c) \vee \ldots] \\ \Leftrightarrow & [\neg H(a) \wedge \neg H(b) \wedge \neg H(c) \wedge \ldots] \\ \Leftrightarrow & (\forall t)\neg H(t) \end{array}$$

$\square$

Let op het verband met de wetten van De Morgan. Denk eens na over de ontkenning van de universele kwantor. Kan je dit ook bewijzen?

Definitie 3.1.5. *Een uitbreiding van de existentiële kwantor is de uniciteitskwantor. Deze wordt uitgesproken als 'er bestaat slechts één' en genoteerd door '$\exists!$'.*

Voorbeeld 3.1.10. *Er bestaat slechts één element in $\mathbb{Z}$ zodat $x + 5 = 0$, nl. -5. We krijgen: $\exists! x \in \mathbb{Z} : x + 5 = 0$.*

In voorbeeld 3.1.10 wordt meegegeven dat $x \in \mathbb{Z}$. In dit geval noemen we $\mathbb{Z}$ de *referentieverzameling*. Deze referentieverzameling wordt enkel expliciet meegegeven als er verwarring zou kunnen ontstaan. Zo werd er in voorbeeld 3.1.8 geen referentieverzameling meegegeven. Hier is het duidelijk dat de verzameling waaruit x komt, de verzameling met alle mensen is. We zouden hier eigenlijk ook kunnen schrijven dat

$$\forall x \in M : W(x) \Rightarrow S(x)$$

met $M = \{x | x \text{ is een mens }\}$.

Maak hier oefeningen 4, 5, 6 en 7 uit paragraaf 3.3.

Vanaf het moment dat een uitspraak gekwantificeerd is (d.w.z. dat er gebruik gemaakt is van kwantoren), is het een propositie geworden omdat je kan bepalen of de uitspraak waar of vals is. De waarheidswaarde hangt af van de gekozen kwantoren en van de referentieverzameling.

We hebben in deze paragraaf enkele belangrijke equivalenties bewezen:

$$\neg(\forall x)H(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg H(x)$$

$$\neg(\exists x)H(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$$

3.1.4 Gekwantificeerde uitspraken met meer dan één veranderlijke

In deze paragraaf zullen we ons beperken tot voorbeelden met twee veranderlijken. We zagen reeds dat we bijvoorbeeld 'x is vader van y' konden voorstellen door $P(x, y)$ met P: 'vader zijn'. Elk van de veranderlijken kan door kwantoren gebonden worden. Je hebt dus steeds twee kwantoren en twee verzamelingen. Ook

nu zijn gekwantificeerde predicaten proposities.
Als we beide kwantoren toepassen op beide variabelen, krijgen we 8 uitspraken. Hieronder staan twee kolommen. Verbind de juiste formule met de juiste uitspraak.

1. $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$	1. Er bestaat een kind dat kind is van iedereen.
2. $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$	2. Iedereen is vader van minstens één mens.
3. $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	3. Voor iedereen bestaat er een vader.
4. $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$	4. Er bestaat een vader en er bestaat een kind van die vader.
5. $(\forall y)(\forall x)P(x,y)$	5. Er is een vader van alleman.
6. $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$	6. Iedereen is vader van iedereen.
7. $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$	7. Iedereen is kind van iedereen.
8. $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	8. Er bestaat een kind en er bestaat een vader van dat kind.

Welke van de uitspraken zijn waar en welke zijn onwaar?

Verwisselbaarheid van de kwantoren

Wat denk je van de verwisselbaarheid van de geziene kwantoren?
Controleer dit aan de hand van het voorbeeld 'x is vader van y'.

> De symbolen van de predicatenlogicataal bestaan uit
> de predicaatsymbolen $A, \ldots, Z$,
> de functiesymbolen $+, \surd, <, > \ldots$
> de constanten $a, \ldots, t$,
> de variabelen $u, \ldots, z$,
> de connectieven $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
> de kwantoren $\forall, \exists$
> de hulptekens zoals haakjes ...

3.2 Formules van de predicatenlogica

We kennen nu de symbolen van de predicatenlogicataal. Aan de hand van deze symbolen kunnen we de logische uitspraken/formules van de predicatenlogica definiëren. In de definitie gebruiken we de letters ϕ en ψ voor willekeurige logische uitspraken/formules, net zoals bij de propositielogica.
We voegen eerst nog een andere definitie in.

Definitie 3.2.1. *Zowel variabelen als constanten noemen we termen.*

Definitie 3.2.2. *Logische uitspraken/formules van de predicatenlogica:*

- *Als P een n-plaatsig predicaatsymbool is en $t_1, \ldots, t_n$ zijn termen, dan is $P(t_1, \ldots, t_n)$ een logische uitspraak/formule.*
- *Als ϕ een logische uitspraak/formule is, dan is ook $\neg\phi$ een logische uitspraak/formule.*
- *Als ϕ en ψ logische uitspraken/formules zijn, dan zijn ook $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \Rightarrow \psi)$ en $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ logische uitspraken/formules.*
- *Als ϕ een formule is en v een variabele, dan zijn ook $(\forall v)\phi$ en $(\exists v)\phi$ logische uitspraken/formules.*
- *Andere logische uitspraken/formules dan diegene die op bovenstaande manier gevormd worden, zijn er niet.*

Alle logische uitspraken/formules die geen losse predicaten zijn, noemen we samengestelde logische uitspraken/formules. Een logische uitspraak/formule noemen we een logische deeluitspraak of deelformule van een logische uitspraak/formule als die bij de opbouw van die logische uitspraak/formule gebruikt is; elke logische uitspraak/formule is tevens een logische deeluitspraak/ deelformule van zichzelf.

Voorbeeld 3.2.1. *De deelformules van $\neg\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y \leq x))$ zijn:*

- $\neg\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y \leq x))$
- $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y \leq x))$
- $(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y \leq x))$
- $P(x)$
- $\forall y\ (P(y) \Rightarrow y \leq x)$
- $(P(y) \Rightarrow y \leq x)$

- $P(y)$
- $y \leq x$

Merk hierbij op dat voor $P(y)$ *de* y *geen deelformule is, maar een term waarmee het predicaat is opgebouwd. Hetzelfde geldt voor* x *en* y *in* $y \leq x$.

Voor de haakjes gelden dezelfde conventies als bij de propositielogica. De kwantoren worden in afnemende volgorde tussen $\vee$ en $\Rightarrow$ geplaatst zodat we volgende volgorde krijgen:

$$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Voorbeeld 3.2.2. *We interpreteren de uitdrukking* $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x,y)$ *in onderstaande volgorde:*

$$((\forall x)\ A(x)) \Rightarrow B(x,y)$$

$$(((\forall x)\ A(x)) \Rightarrow B(x,y))$$

Maak hier oefeningen 8, 9, 10 en 11 uit paragraaf 3.3.

Definitie 3.2.3. *Het bereik van een kwantor definiëren we als het deel (of de delen) van de formule waar de kwantor betrekking op heeft.*

Voorbeeld 3.2.3. *Het bereik van de alkwantor in* $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)R(z,y)$ *is* $P(x)$. *Het bereik van de existentiële kwantor is* $R(z,y)$

In de formule $(\forall x)\ (x^2 > y)$ spelen de variabelen x en y een totaal verschillende rol omdat de waarde van y vrij gekozen mag worden terwijl de waarde van x geen specifieke waarde is maar het moet voor alle getallen zo zijn.

Definitie 3.2.4. *Als een variabele binnen het bereik van een kwantor ligt, noemen we deze variabele een* gebonden variabele*. Wanneer dit niet het geval is, noemen we de variabele een* vrije variabele*.*

Voorbeeld 3.2.4. *In de formule* $(\forall x)\ (x^2 > y)$ *is* y *een vrije variabele en* x *een gebonden variabele.*

Maak hier oefening 12 uit paragraaf 3.3.

Er is een probleem uit de propositielogica dat verholpen kan worden in de predicatenlogica. Herinner het voorbeeld ‘Pieter kwam binnen en deed het licht aan’. We waren tot de conclusie gekomen dat een conjunctie $p \wedge q$ geen recht toedoet aan de tijdsordening. De betekenis van deze zin is anders dan dat Pieter eerst het licht aan zou doen en dan zou binnenkomen. Een vertaling naar de predicatenlogica als $B(p) \wedge L(p)$ zou hier niets aan veranderen. Maar we kunnen dit effect wel verhelpen door B en L tweeplaatsig te maken en $B(p, y)$ te laten betekenen dat Pieter binnenkomt op tijdstip y. Voor de eenvoud gebruiken we voor deze tijdstippen de variabelen $t_0, t_1, t_2 \ldots$. We kunnen de zin nu vertalen d.m.v. volgende formule:

$$(\exists t_1)(\exists t_2)(t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_0 \wedge B(p, t_1) \wedge L(p, t_2))$$

waarbij t_0 het tijdstip van de uitspraak betekent. Hieruit kunnen we concluderen dat de predicatenlogica ruimer is dan de propositielogica.

De predicatenlogica is niet alleen ruimer, we kunnen er ook aardig wat wiskunde mee weergeven. Dit kunnen we bijvoorbeeld illustreren aan de hand van het vermoeden van Goldbach (Duits wiskundige, 1690 - 1764).

‘Elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen.’

Hoe zou je het vermoeden formuleren in de predicatenlogica?

Het vermoeden van Goldbach klinkt jullie misschien niet zo bekend in de oren. Hopelijk herken je enkele van de volgende voorbeelden wel.

Voorbeeld 3.2.5. *De definitie van een dalende/stijgende functie in een interval:*

- *Een functie f is stijgend in $[a, b]$ $\Leftrightarrow$*

$$f \text{ is gedefinieerd in } [a, b] \text{ en } \forall x, y \in [a, b] : x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

- *Een functie f is dalend in $[a, b]$ $\Leftrightarrow$*

$$f \text{ is gedefinieerd in } [a, b] \text{ en } \forall x, y \in [a, b] : x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Voorbeeld 3.2.6. *De definitie van een vierkantswortel:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a.$$

Voorbeeld 3.2.7. *De definitie van een logaritme:*

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \ {}^a\log x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Voorbeeld 3.2.8. *De definitie van een limiet:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_0^+ : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Voorbeeld 3.2.9. *De middelwaardestelling van de integraalrekening:*

$$f \textit{ continu over } [a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c).$$

Maak hier oefening 13 uit paragraaf 3.3.

3.3 Oefeningen

Oefening 3.3.1. *Geef volgende uitspraken weer in predicatenlogica.*

1. *x is een priemgetal.*
2. *5 is groter dan 3.*
3. *$\frac{1}{2}$ ligt tussen 0 en 1.*
4. *Punt D heeft dezelfde afstand tot P, Q en R.*
5. *Marie houdt van hem.*

Oefening 3.3.2. *Vertaal volgende uitspraken:*

1. *Jan houdt van Marie, maar Marie niet van Jan.*
2. *x is groter dan 0 of y is kleiner dan 1.*
3. *Als x groter is dan 3 en een priemgetal is, dan is x oneven.*

Oefening 3.3.3. *Vertaal volgende uitspraken:*

1. *Alle natuurlijke getallen zijn groter dan of gelijk aan 0.*
2. *Elk natuurlijk getal is groter dan elk negatief geheel getal.*

Oefening 3.3.4. *Formuleer onderstaande formules in woorden als je weet dat P: 'van het mannelijk geslacht zijn', Q: 'ouder zijn dan 40 jaar' en de referentieverzameling gelijk is aan $M = \{x|x \text{ is een mens }\}$. Zeg er ook bij of de uitspraak die je bekomt klopt.*

1. $\forall x \in M : \neg P(x)$
2. $\exists x \in M : \neg Q(x)$
3. $\forall x \in M : P(x) \vee Q(x)$

Oefening 3.3.5. *Kwantificeer de volgende uitspraken zodat je telkens een ware uitspraak bekomt. Werk met de referentieverzameling $\mathbb{R}$.*

1. *. . . :* $x + 6 = 0$.
2. *. . . :* $2x = 4$.
3. *. . . :* $x = x$.

4. *. . . :* $2x - 3 < 0$.
5. *. . . :* $x^2 = -16$.

Oefening 3.3.6. *Formuleer een equivalente propositie.*

1. *Niet alle mensen gaan op reis.*
2. *Er zijn geen vogels die praten.*
3. *Sommige bloemen zijn niet gekleurd.*
4. *Geen enkele olifant heeft geen slurf.*

Oefening 3.3.7. *Ga na of de volgende proposities waar of vals zijn en bewijs ze ook.*

1. *Alle priemgetallen zijn oneven.*
2. $\forall x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$.
4. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.

Oefening 3.3.8. *Welke van de volgende uitdrukkingen zijn formules en welke niet? Indien het een formule is, leg uit wat de formule uitdrukt. Indien het geen formule is, leg uit waarom.*

1. $(\exists x)\ (\forall y)\ x = y$
2. $(\forall x)\ x \geq y \Rightarrow\ (\exists z)\ y = z$
3. $(\forall x)\ \wedge\ (\exists z)\ R(x, z)$
4. $(\forall x)\ x \wedge\ (\exists z)\ z > y$
5. $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ (x > y \vee y > z)$

Oefening 3.3.9. *Stel gegeven een verzameling V waarop een relatie $\leq$ is gedefinieerd. Geef de volgende uitspraken weer met formules uit de predicatenlogica door enkel V en $\leq$ te gebruiken.*

1. *Er is een kleinste element in V.*
2. *Er is geen grootste element in V.*

Oefening 3.3.10. *Vul de haakjes in onderstaande formules verder aan in de volgorde waarop we de formule moeten interpreteren.*

1. $(\forall x)A(x) \vee B(y, x)$
2. $(\forall x)(\exists y)A(x, y)$
3. $(\forall x)A(x) \wedge \neg A(y)$

Oefening 3.3.11. *Haal zo veel mogelijk haakjes weg uit onderstaande formule zodat de interpretatie nog wel dezelfde blijft.*

$$(((\forall x)(A(x) \Rightarrow A(x))) \vee ((\exists x)A(x)))$$

Oefening 3.3.12. *Geef in de volgende formules steeds het bereik van $\forall y$, en geef aan of de gebruikte variabelen vrij of gebonden zijn.*

1. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\ y + z = x$
2. $(\forall y)(\exists z)\ y + z = x$
3. $P(y) \Rightarrow (\forall y)(\exists z)\ y < z$

Oefening 3.3.13. *Voor een functie f geldt:*

$$\text{functie } f \text{ is inverteerbaar} \Leftrightarrow \forall x, y \in dom\ f : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Vul nu onderstaande uitspraak aan en werk alle negaties weg (zo wordt $\neg(a = b)$ bijvoorbeeld $a \neq b$).

$$\text{functie } f \text{ is NIET inverteerbaar} \Leftrightarrow \cdots$$

Extra oefeningen

Oefening 3.3.14. *Vertaal de volgende zinnen in formules van de predicatenlogica.*

1. *Iedereen die persistent is, kan logica leren.*
2. *Geen enkel politicus is eerlijk.*
3. *Niet alle vogels kunnen vliegen.*
4. *Alle vogels kunnen niet vliegen.*
5. *Senioren daten enkel met junioren.*
6. *Kelly haat alle mensen die zichzelf niet haten.*

Oefening 3.3.15. *Vertaal volgende formules naar de gewone taal.*

1. $(\forall x)(M(x) \wedge (\forall y)\neg V(x,y) \Rightarrow O(x))$. *Hierbij betekent* $M(x)$ *'x is een man',* $V(x,y)$ *betekent 'x is getrouwd met y' en* $U(x)$ *betekent 'x is ongelukkig'.*
2. $\neg(\exists y)(N(y) \wedge (\forall x)(N(x) \Rightarrow L(x,y)))$. *Hierbij staat* N *voor 'het zijn van een natuurlijk getal', en* $L(x,y)$ *betekent '*$x \leq y$*'.*

Oefening 3.3.16. *Vul de haakjes in onderstaande formules verder aan in de volgorde waarop we de formule moeten interpreteren.*

1. $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(x)$
2. $(\forall x)(\forall z)(\forall u)A(x) \Rightarrow A(y) \wedge \neg A(x)$

Oefening 3.3.17. *Ga na of in volgende formules de gebruikte variabelen vrij of gebonden zijn.*

1. $(\forall z)(((\forall x)A(x,y)) \Rightarrow A(z,a))$
2. $(\forall y)A(z,y) \Rightarrow (\forall z)A(z,y)$

Hoofdstuk 4

Computerles

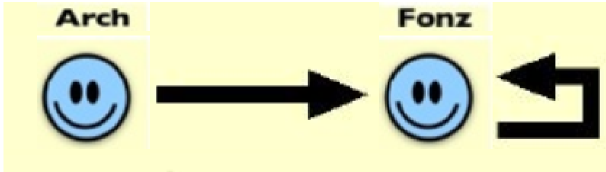
Bij de propositielogica konden we met behulp van waarheidstabellen nakijken of een formule al dan niet waar was. Bij de predicatenlogica werkt dit net iets anders. Beschouw de volgende formule:

$$(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge y > x)).$$

Wanneer $P=$ 'is priem', vertelt deze logische uitspraak ons dat er geen grootste priemgetal bestaat. Als we ons baseren op getaltheorie, weten we dat dit inderdaad waar is. Er bestaat effectief geen grootste priemgetal. Maar natuurlijk steunt men dan op het feit dat P zou staan voor 'is priem', terwijl P in principe even goed zou kunnen staan voor 'is een prijs in de trekking' ... en in die situatie zou de uitspraak niet waar zijn. De hoofdprijs is wellicht de grootste prijs en die bestaat. Dat we 'volgens de vertaalsleutel' geneigd zouden zijn een formule waar te noemen, is een neiging die we moeten onderdrukken. Ook in de propositielogica maakte het niet uit voor wat de propositieletters p, q ... stonden. We keken los van de vertaalsleutel naar de omstandigheden waaronder een formule waar is. Dit scenario willen we ook in de predicatenlogica creëren.

Precies aangeven wanneer een formule waar is, is in de predicatenlogica minder eenvoudig dan in de propositielogica. De waarheidstabellen van de connectieven spelen nog steeds een rol maar we kunnen de waarheidswaarden van een formule in de predicatenlogica niet in een overzichtelijke tabel weergeven. Dit is zo omdat de waarheidswaarde van een formule niet altijd te berekenen is uit de waarheidswaarden van de deelformules. We kunnen wel situaties aangeven waarin formules waar zijn.

Voorbeeld 4.0.1. *De figuur hierna is een graaf: een verzameling objecten, namelijk Arch en Fonz, met een tweeplaatsige relatie daartussen.*



We noteren de relatie met $R(x, y)$, wat staat voor 'persoon x kent persoon y'. De relatie R is met pijlen weergegeven. In dit geval is R(a,f) (met a voor Arch en f voor Fonz) waar, want er gaat een pijl van Arch naar Fonz. Zo is ook $R(f, f)$ waar (vanwege de pijl van Fonz naar Fonz zelf). We kunnen ook kijken of enkele samengestelde formules waar zijn in deze structuur:

- $(\exists y)R(a, y)$: *'Arch kent iemand'. Dit is waar, want Arch kent Fonz.*
- $(\forall x)R(x, x)$: *'iedereen kent zichzelf'. Dit is niet waar want Arch kent zichzelf niet, alleen Fonz kent zichzelf.*
- $(\exists y)(\forall x)R(x, y)$: *'er is iemand die door iedereen gekend wordt'. Dit is waar, want Fonz wordt gekend door Arch en door zichzelf.*
- *We kunnen ook met connectieven werken:* $R(a, f) \wedge R(f, f)$ *is waar omdat* $R(a, f)$ *en* $R(f, f)$ *beide waar zijn.* $R(a, f) \Rightarrow R(f, a)$ *is niet waar omdat er wel een pijl gaat van Arch naar Fonz, maar niet van Fonz naar Arch.*
- $(\forall y)((\exists x)R(x, y) \Rightarrow R(y, y))$ *is waar. Als* $y = a$, *dan is* $(\exists x)R(x, y)$ *en* $R(y, y)$ *onwaar en dus is de implicatie waar. Als* $y = f$, *dan zijn* $(\exists x)R(x, y)$ *en* $R(y, y)$ *beide waar en ook dan is de implicatie waar.*

Definitie 4.0.1. *Een situatie als in voorbeeld 4.0.1. heet in de logica een* model. *Een situatie is een* model *van een formule als de formule daarin waar is. Een model bestaat uit een verzameling objecten waarop een aantal relaties en bewerkingen zijn gegeven die overeenkomen met de predicaat- en functiesymbolen.*

Definitie 4.0.2. *Een formule zoals* $R(a, f)$ *is waar in een model als, gegeven de vertaalsleutel voor* a, f *en* R, *de met* R *in het model corresponderende relatie geldt tussen de in het model met* a *en* f *corresponderende objecten. Dit geldt net zo voor bijvoorbeeld variabelen* x *en* y. *Een formule* $(\exists x)\phi$ *is waar als er een object in het model is zodat* ϕ *waar is. En een formule* $(\forall x)\phi$ *is waar als het voor alle objecten in het model waar is.*

Wanneer er ook nog sprake is van een éénplaatsig predicaatsymbool P (een *eigenschap*), markeren we de objecten die aan een bepaalde eigenschap voldoen afzonderlijk.

Voorbeeld 4.0.2. *We gaan van een aantal formules na of ze waar of onwaar zijn in het model hierna. Dit model verbeeldt twee objecten, een eigenschap en een relatie. Object a heeft eigenschap P, wat we aangeven met een open rondje, en de relatie R wordt weergegeven met behulp van een pijl.*

- $(\exists x)(P(x) \wedge R(x, x))$
  Dit is waar. Stel $x = a$ dan zal $P(a)$ waar zijn want a heeft eigenschap P en $R(a, a)$ is ook waar want er gaat een pijl van a naar a.

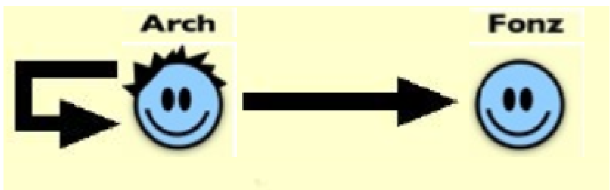
- $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$
  Dit is niet waar. Er vertrekt geen pijl in b. Het geldt dus niet voor alle x, want het geldt niet voor b.

- $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)R(x, y))$
  Dit is waar. Aan x kunnen we zowel a als b toekennen. In het eerste geval heeft het object eigenschap P. En er bestaat ook een y zodat $R(x, y)$, namelijk b. De implicatie zal dus waar zijn. Als $x = b$, is $P(x)$ onwaar. De implicatie zal dus altijd waar zijn.

- *Denk zelf eens na over* $(\forall x)(R(x, x) \Rightarrow (P(x) \wedge (\exists y)(R(x, y) \wedge \neg P(y))))$.

Merk op dat we in de formules uit bovenstaand voorbeeld, a en b nergens benoemen, maar dat we er toch een betekenis aan kunnen geven.

Voorbeeld 4.0.3. *We kunnen voor voorbeeld 4.0.2. ook een meer beeldende interpretatie kiezen. Arch heeft haar, Arch kent zichzelf en Arch kent Fonz.*

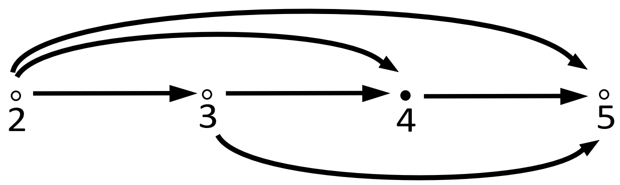


De formules uit het vorige voorbeeld, blijven hier dezelfde waarheidswaarde hebben.

- $(\exists x)(P(x) \wedge R(x, x))$
  'Er bestaat een behaard persoon die zichzelf kent.' Deze uitspraak is waar: Arch.

- $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$
  'Voor iedereen bestaat er iemand die hij/zij kent.' Dit is niet waar, want Fonz kent niemand.
- $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)R(x,y))$
  'Ieder behaard persoon kent iemand.' Dit is waar. Arch is de enige behaarde en die kent Fonz.
- $(\forall x)(R(x,x) \Rightarrow (P(x) \land (\exists y)(R(x,y) \land \neg P(y))))$
  'Iedereen met zelfkennis is behaard en kent een kaal persoon.' Dit is waar. Arch is de enige die zichzelf kent en hij is behaard en bovendien kent hij een kaal persoon, namelijk Fonz.

Oefening 4.0.18. *Beschouw het volgende model. Het bestaat uit de getallen 2, 3, 4 en 5 met de 'kleiner dan'-relatie en de priemgetaleigenschap.*



Ga na of de volgende formules waar zijn in dit model:

- $x < 5 \Rightarrow P(x)$
- $x < 4 \land x > 2$

Bij een constante ligt de waarde vast door het model. Voor een variabele is dit niet het geval. Om te kunnen vaststellen of een formule in zo'n geval waar is, moeten de waarden van de variabele expliciet worden aangegeven. Zo is bijvoorbeeld $P(x) \land (\exists y)R(x,y)$ waar in voorbeeld 4.0.2. als $x = a$, maar niet waar als $x = b$.

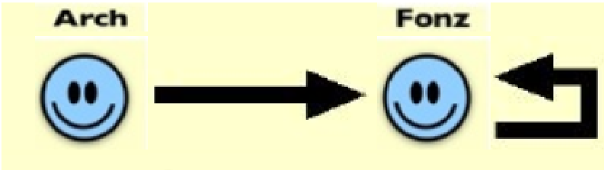
Definitie 4.0.3. *In het voorgaande bekeken we steeds een model en keken we naar welke formules waar waren. Soms zijn we meer geïnteresseerd in het zoeken naar een gepast model, wanneer een formule gegeven is. Met een gepast model wordt een model bedoeld dat de formule waar maakt. Als dit lukt, noemen we de formule vervulbaar. Een formule is dus vervulbaar als ze een model heeft.*

Er zijn tal van applets op het net te vinden om dit hele idee te illustreren. Een aantal goede logica-applets vinden jullie op onderstaande link:

http://www.opener2.ou.nl:8080/opener/spinoza/lia/index.html

Kies hier voor de VERIFICATOR en lees aandachtig de uitleg i.v.m. de applet onderaan de site.

Het aardige van deze machine is dat je, bij het zoeken naar een model voor een formule, je formule kan laten staan, om vervolgens weer aan je model te gaan sleutelen zodat de formule vervulbaar wordt.
Met de verificator kunnen we de eerder geziene modellen uit deze paragraaf illustreren. D.w.z. teken het model en evalueer de formules. Let op, voor het invoeren van de formules moet je soms wel en soms geen haakjes gebruiken. De relatie R wordt voorgesteld door K (van 'knows') en je mag simpelweg: $K\ x\ y$ typen. Ook rond $\exists x$ en $\forall x$ moet je geen haakjes plaatsen.
Teken volgend model.



Toets het volgende in bij de formules onderaan: $\exists y\ K\ y\ f$. Er bestaat een y waarvoor geldt dat hij Fonz kent. Dat klopt, want bijvoorbeeld Arch kent Fonz. Als je het juiste model getekend hebt, en de juiste formule hebt ingevoerd, zie je een groen lichtje verschijnen na het klikken op EVAL. Als dit een blauw lichtje is, wil dat zeggen dat er nog een syntaxfout in je formule zit. Als je nu in hetzelfde model de formule $K\ y\ f$ zou evalueren, zie je een oranje lichtje branden. Dit wil zeggen dat de formule juist is in bepaalde gevallen. In welke gevallen dit precies is, wordt weergegeven bij de positieve variabelen onderaan. Hier zie je bijvoorbeeld bij de positieve variabele y de naam Arch verschijnen. Hiermee bedoelt men dat de formule klopt wanneer we y gelijkstellen aan Arch. Het is nu aan jullie om nog enkele andere van de eerder geziene formules na te gaan.

Geef nu volgende formule in:

$$(\forall x)P(x) \wedge (H(x) \Rightarrow R(x,x))$$

Dit doe je door: $\forall x\ P\ x \wedge (\ H\ x \Rightarrow K\ x\ x)$
De formule zegt dat elke x pijpdragend is en dat als hij haardragend is, hij zichzelf kent. Het is de bedoeling een model te tekenen dat deze formule waar maakt voor een bepaalde x. Hier zijn meerdere mogelijkheden voor. Probeer er enkele uit.

Doe dit ook voor de volgende formules:

- $(\exists y)(H(y) \vee R(y,a))$
- $P(x) \wedge R(x,x)$
- $(\forall x)R(x,x)$

- Bedenk er zelf nog enkele.

Als er tijd over is, mogen jullie ook de andere applets eens bekijken. Bij elke applet wordt verder uitgelegd hoe je ermee moet werken.

Hoofdstuk 5

Alle definities op een rij

Antecedens	Het onderstelde van de implicatie.	p. 24
Bereik van een connectief	Het deel (of de delen) van de formule waar het connectief betrekking op heeft.	p. 17
Bereik van een kwantor	Het deel (of de delen) van de formule waar de kwantor betrekking op heeft.	p. 63
Conjunctieve normaalvorm	Zij ϕ een (samengestelde) propositie. Dan is ϕ logisch equivalent met een propositie ψ die bestaat uit conjuncties van disjuncties van de propositieletters of negaties van de propositieletters. We zeggen dat ψ in conjunctieve normaalvorm is.	p. 39
Connectieven	Voegwoorden die van enkelvoudige uitspraken een samengestelde uitspraak maken.	p. 12
Consequens	Het gestelde van de implicatie.	p. 24
Contradictie	Een propositie heet een contradictie als en slechts als deze steeds onwaar is, d.w.z. dat voor een propositie ϕ, $w(\phi) = 0$ voor elke waardering w.	p. 34
Disjunctieve normaalvorm	Zij ϕ een (samengestelde) propositie. Dan is ϕ logisch equivalent met een propositie ψ die bestaat uit disjuncties van conjuncties van de propositieletters of negaties van de propositieletters. We zeggen dat ψ in disjunctieve normaalvorm is.	p. 39

EN-poort	Een EN-poort is een schakeling met één uitgang en meerdere ingangen, waarbij de uitgang slechts 1 is als en slechts als alle ingangen 1 zijn. De uitgang wordt 0 zodra minstens één ingang 0 wordt.	p. 28
Existentiële kwantor	Het symbool $\exists$	p. 59
Formules van de predicatenlogica	Definitie is te lezen op p. 62.	p. 62
Formules van de propositielogica	Definitie is te lezen op p. 16.	p. 16
Gebonden variabele	Een variabele die binnen het bereik van een kwantor ligt.	p. 63
Gelijkwaardige schakelingen	We noemen twee schakelingen gelijkwaardig als de output hetzelfde is bij dezelfde stand van schakelaars, d.w.z. dat de uitspraken die het circuit weergeven, gelijkwaardige uitspraken zijn. De schakeling waarin het minste schakelaars voorkomen, noemen we de eenvoudigste.	p. 38
Gelijkwaardige uitspraken	Gelijkwaardige uitspraken zijn uitspraken die dezelfde waarheidstabel hebben, d.w.z. dat de waarheidstabel van de equivalentie van de twee uitspraken een tautologie vormt. We noemen gelijkwaardige uitspraken soms ook logisch equivalente uitspraken.	p. 35
Logische poort	Een logische poort is een elektronische schakeling met één of meerdere ingangen en één uitgang, waarbij de logische toestand van de uitgang enkel en alleen bepaald wordt door de logische toestand van de ingangen. Met logische toestand bedoelen we hier 0 of 1.	p. 28

Model	Een situatie is een model van een formule als de formule daarin waar is. Een model bestaat uit een verzameling objecten waarop een aantal relaties en bewerkingen zijn gegeven die overeenkomen met de predicaat- en functiesymbolen.	p. 71
Modus ponens	Uit de ware implicatie $p \Rightarrow q$ concluderen we dat als p waar is, q ook waar is.	p. 22
Modus tollens	Uit de ware implicatie $p \Rightarrow q$ concluderen we dat als q niet waar is, p ook niet waar is.	p. 22
NEN-poort	Een NEN-poort is een EN-poort gevolgd door een NIET-poort. Het is een schakeling waarin de uitgang 1 wordt van zodra één of meerdere ingangen 0 zijn. De uitgang kan enkel 0 zijn als en slechts als alle ingangen 1 zijn.	p. 31
NIET-poort	Een NIET-poort is een schakeling met één ingang en één uitgang, waarbij de uitgang altijd de inverse toestand heeft van de ingang. De uitgang is dus 1 als de ingang 0 is en de uitgang is 0 als de ingang 1 is.	p. 30
NOF-poort	Een NOF-poort is een OF-poort gevolgd door een NIET-poort. Het is een schakeling waarin de uitgang 0 wordt van zodra één of meerdere ingangen 1 zijn. De uitgang kan enkel 1 zijn als en slechts als alle ingangen 0 zijn.	p. 31
n-plaatsige predicaatsymbolen	Voor $H(j, m)$ is H een tweeplaatsig predicaatsymbool. Er zijn ook éénplaatsige, drieplaatsige, vierplaatsige of nog algemener, n-plaatsige predicaatsymbolen.	p. 57
OF-poort	Een OF-poort is een schakeling met één uitgang en meerdere ingangen, waarbij de uitgang 1 is zodra minstens één ingang 1 is. De uitgang wordt 0 als en slechts als alle ingangen 0 zijn.	p. 29
Predicaat	Een propositie die afhangt van één of meer variabelen. Predicaten worden op dezelfde manier genoteerd als functies, bijvoorbeeld $S(x)$.	p. 56

Propositie	Een uitspraak die waar/onwaar is.	p. 11
Propositieletter	Kleinst mogelijke deeluitspraken (of enkelvoudige uitspraken). We benoemen ze met de letters $p, q, r \ldots$	p. 12
Samengestelde uitspraak	Uitspraken die samengesteld zijn uit enkelvoudige uitspraken door middel van voegwoorden. We benoemen ze met Griekse letters zoals $\phi, \psi \ldots$	p. 12
Tautologie	Een propositie ϕ heet een tautologie indien $w(\phi) = 1$ voor elke waardering w.	p. 34
Termen	Zowel variabelen als constanten	p. 62
Uniciteitskwantor	Staat voor 'er bestaat slechts één' en wordt genoteerd door '$\exists!$'.	p. 60
Universele kwantor	Het symbool $\forall$	p. 59
Vervulbaar	Een formule is vervulbaar als ze een model heeft.	p. 73
Vrije variabele	Een variabele die niet binnen het bereik van een kwantor ligt.	p. 63
Waardering	Een waardering w is een afbeelding $$w : \{\phi \mid \phi \text{ is een propositie}\} \longrightarrow \{0, 1\}$$ die aan elke propositieletter een waarheidswaarde 0 of 1 toekent (bijvoorbeeld $w(p) = 1$, $w(q) = 0 \ldots$). Verder kent de afbeelding aan elke formule een waarheidswaarde toe die in overeenstemming is met de gegeven waarheidswaarden voor de propositieletters en de waarheidstabellen voor de connectieven. D.w.z. dat wanneer ϕ een samengestelde propositie is uit de propositieletters $p, q, r, s \ldots$, men $w(\phi)$ zal kennen van zodra men ook $w(q), w(r), w(s) \ldots$ kent.	p. 33